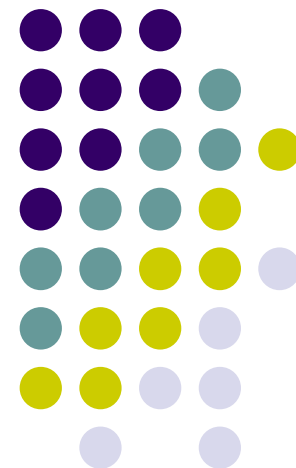


Lekcija 1: *Osnove multivarijabilnih sistema upravljanja*

Prof.dr.sc. Jasmin Velagić
Elektrotehnički fakultet Sarajevo

Kolegij: Multivarijabilni sistemi

2012/2013



Kolegij: Multivarijabilni sistemi

Predmetni nastavnik: Prof.dr.sc. Jasmin Velagić, dipl.inž.el.

e-mail: jasmin.velagic@etf.unsa.ba

tel.: 033 25 07 65

Konzultacije:

Subotom 9 -13, ili po dogovoru

**Načini provjere
znanja:**

domaće zadaće	(20%)
seminarski rad	(40%)
završni ispit	(40%)



Kolegij: Multivarijabilni sistemi

Nastavne jedinice:

1. Uvod u multivarijabilne sisteme
2. Ograničenja na performanse MIMO sistema
3. Neizvjesnost i robusnost SISO sistema
4. Robusna stabilnost i analiza performansi MIMO sistema
5. Sinteza MIMO regulatora
6. LMI problem i redukcija modela



Kolegij: Multivarijabilni sistemi



4/108

Preporučena literatura:

1. Jasmin Velagić, *Zabilješke s predavanja*, Elektrotehnički fakultet, Sarajevo, 2012, URL: <http://people.etf.unsa.ba/~jvelagic/laras/lecturesmulti%20varijabilno.html>
2. Skogestad, S. and Postlethwaite, I. (2005). *Multivariable Feedback Control: Analysis and Design* (2nd edition). Wiley-Interscience, Chichester, USA.
3. Rosenwasser, E. N. and Lampe, B. P. (2010). *Multivariable Computer-controlled Systems: A Transfer Function Approach*. Springer Verlag, Berlin, Germany.
4. Albertos, P. And Sala, A. (2004). *Multivariable Control Systems: an Engineering Approach*. Springer Verlag, London, UK.

Uvod u multivarijabilne sisteme

- **MIMO** sistem – sistem sa više ulaza i više izlaza.
- Razmatramo sistem sa m ulaza i l izlaza.



- Funkcija prijenosa sistema:

$$y(s) = G(s)u(s)$$

y - vektor dimenzija $l \times 1$

u - vektor dimenzija $m \times 1$

G - matrica dimenzija $m \times l$



Uvod u multivarijabilne sisteme



- Ulazni i izlazni vektori:

$$\mathbf{u} = [u_1 \quad u_2 \quad \dots \quad u_m]^T$$

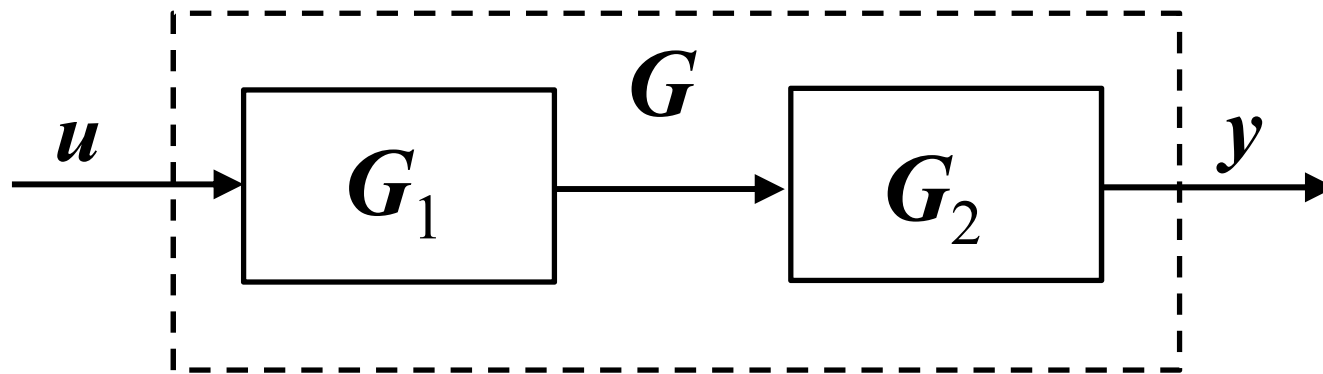
$$\mathbf{y} = [y_1 \quad y_2 \quad \dots \quad y_l]^T$$

- Koncepti relevantni za MIMO, a ne za SISO, sisteme su: **interaktivnost** i **usmjerenost** (engl. directionality).
- **Interakcija između ulaza i izlaza postoji ako promjene na jednom ulazu utječu na promjene svih izlaza.**
- Proces (objekt) upravljanja je **neinteraktivan** ako prvi ulaz utječe samo na prvi izlaz, drugi ulaz samo na drugi izlaz, itd. (matrica \mathbf{G} je dijagonalna matrica).
- Glavna razlika između SISO i MIMO sistema – **postojanje pravaca**, tj. pojačanja ovise o pravcima ulaza, odnosno o kombinaciji ulaza.



Funkcije prijenosa MIMO sistema

- Kvantifikacija multivarijabilne usmjerenosti – **singularna dekompozicija vrijednosti (SVD)**.
- **Kaskadno pravilo:**



$$G = G_2 G_1$$

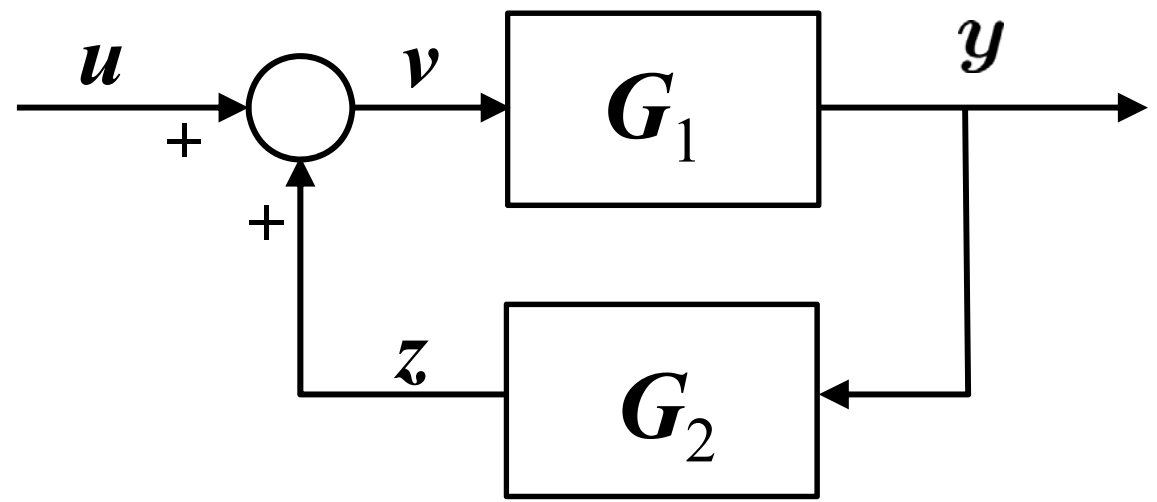
$$G_1 G_2 \neq G_2 G_1$$

- Redosljed – zdesna na lijevo, za razliku od SISO sistema.
- Razlog – množenje matrica nije komutativno.

Funkcije prijenosa MIMO sistema



- **Pravilo povratne veze (pozitivne):**



gdje je:

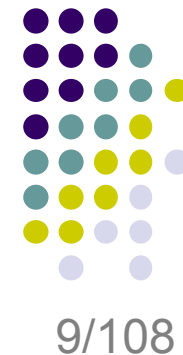
$$v = (I - L)^{-1} u$$

$$L = G_2 G_1$$

- Izlaz y :

$$y = G_1 (I - G_2 G_1)^{-1} u$$

Funkcije prijenosa MIMO sistema



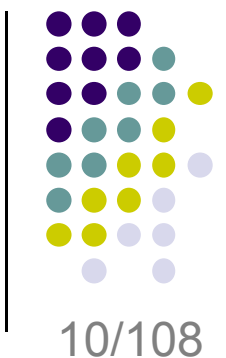
- **Matrični identitet (Push-through pravilo):**

$$\mathbf{G}_1(\mathbf{I} - \mathbf{G}_2\mathbf{G}_1)^{-1} = (\mathbf{I} - \mathbf{G}_1\mathbf{G}_2)^{-1}\mathbf{G}_1$$

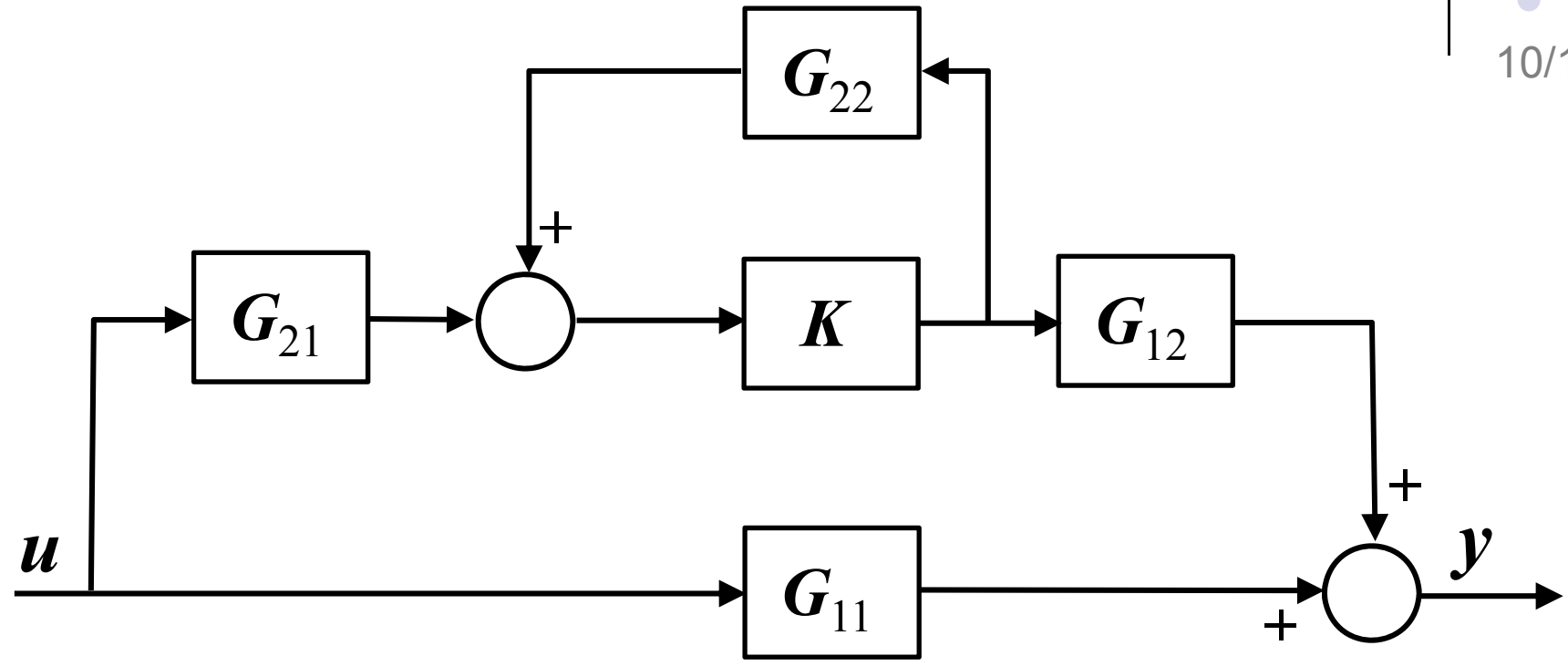
- Dokaz: pomnožiti obje strane gornjeg izraza s lijeva sa $(\mathbf{I} - \mathbf{G}_1\mathbf{G}_2)$, a nakon toga zdesna sa $(\mathbf{I} - \mathbf{G}_2\mathbf{G}_1)$.
- Kombiniranjem kaskadnog i pravila povratne veze dobiva se **MIMO pravilo**:

Započeti sa izlaza sistema i vraćati se unatrag kroz direktne grane prema ulazu sistema. Ukoliko na tim stazama postoje dijelovi sistema sa povratnim vezama zamijeniti ih sa blokovima $(\mathbf{I} - \mathbf{L})^{-1}$ za pozitivnu i $(\mathbf{I} + \mathbf{L})^{-1}$ za negativnu povratnu vezu.

Funkcije prijenosa MIMO sistema



- Primjer 1.

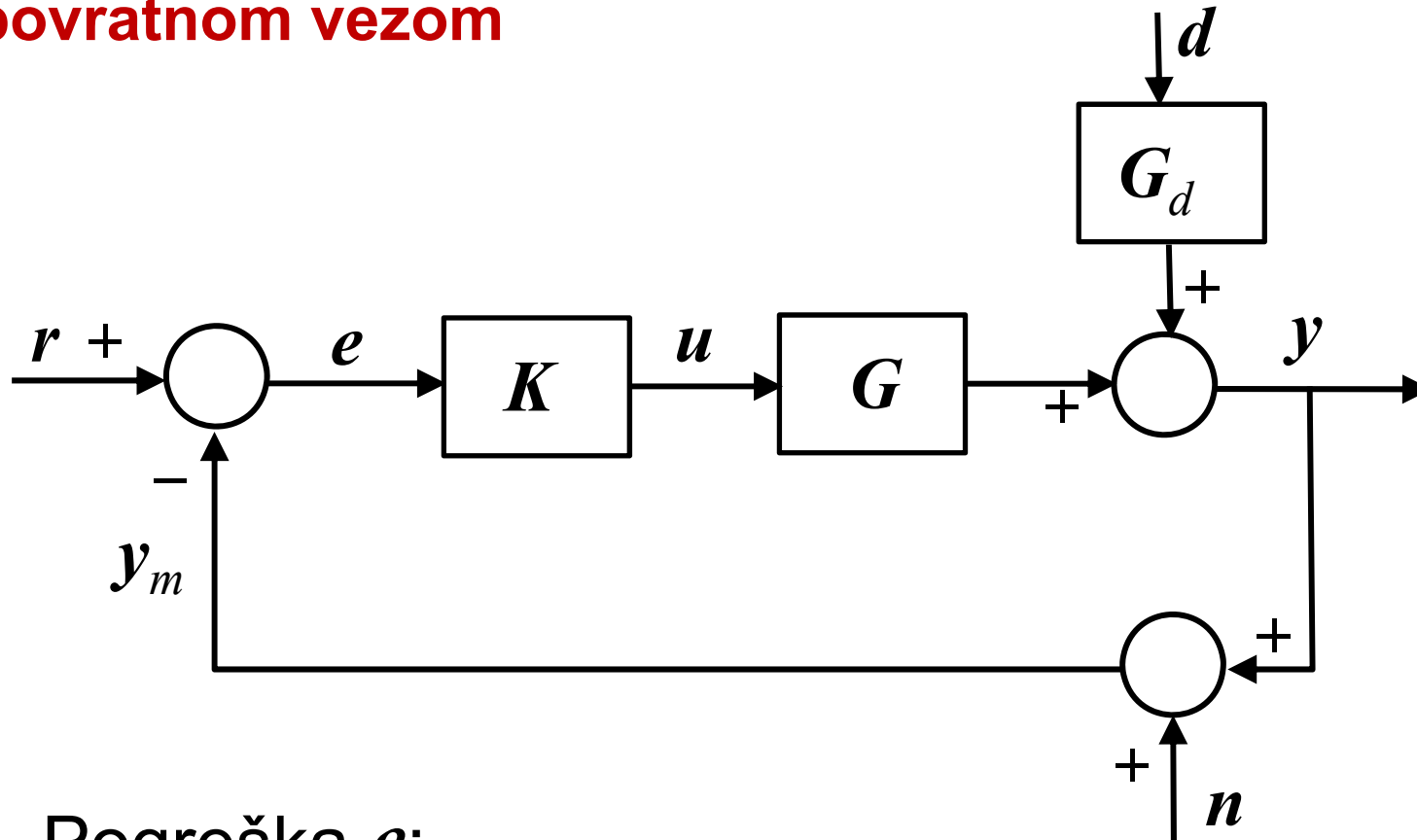


- Funkcija prijenosa sistema:

$$y = (G_{11} + G_{12}K(I - G_{22}K)^{-1}G_{21})u$$

Funkcije prijenosa MIMO sistema

Zatvoreni sistem upravljanja s negativnom povratnom vezom



- Pogreška e :

$$e = -(I + GK)^{-1} r + (I + GK)^{-1} G_d d - GK(I + GK)^{-1} n$$



Funkcije prijenosa MIMO sistema

Zatvoreni sistem upravljanja s negativnom povratnom vezom

- Prethodni izraz može se napisati u obliku:

$$e = -Sr + SG_d d - Tn$$

gdje su:

$$S = (I + GK)^{-1} = (I + L)^{-1}$$

$$T = GK(I + GK)^{-1} = L(I + L)^{-1} = I - S$$

- S i T su funkcije **osjetljivosti sistema** i **komplementarne osjetljivosti sistema** i predstavljaju funkcije prijenosa y u odnosu na r i y u odnosu na n :

Funkcije prijenosa MIMO sistema

Zatvoreni sistem upravljanja s negativnom povratnom vezom



- U prostoru stanja imamo:

$$L(s) = C(sI - A)^{-1} B + D$$

$$L(s) = G(s)K(s)$$

- Na temelju navedenog mogu se izvesti sljedeće relacije:

$$(I + L)^{-1} + L(I + L)^{-1} = S + T = I$$

$$G(I + KG)^{-1} = (I + GK)^{-1} G$$

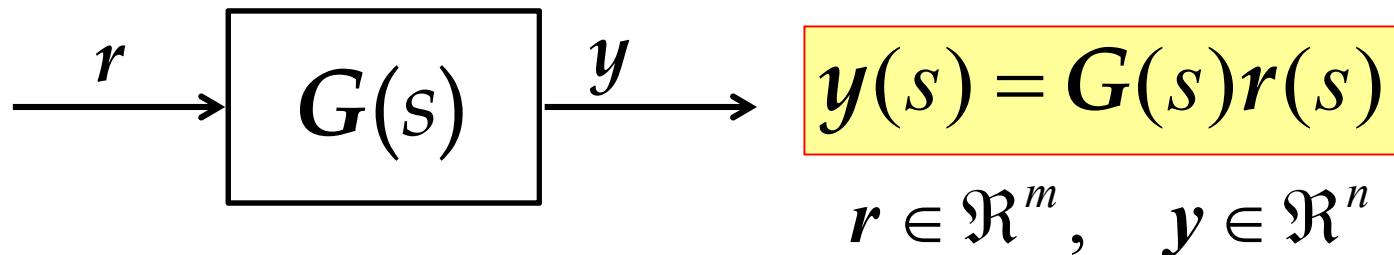
$$GK(I + GK)^{-1} = G(I + KG)^{-1} K = (I + GK)^{-1} GK$$

$$T = L(I + L)^{-1} = (I + (L)^{-1})^{-1}$$

Frekvencijski odziv MIMO sistema

Frekvencijski odziv

- Frekvencijsko područje – idealno za proučavanje pravaca u MIMO sistemima na bilo kojoj frekvenciji.



- Na ulazu j se primijeni skalarni sinusoidalni signal:

$$r_j(\omega) = r_{j0} \sin(\omega t + \alpha_j)$$

- Odziv na izlazu i je također sinusoidalan na istoj frekvencijom ω :

$$y_i(\omega) = y_{i0} \sin(\omega t + \beta_i)$$



Frekvencijski odziv MIMO sistema

- Pojačanje i faza:

$$|g_{ij}(j\omega)| = \frac{y_{i0}}{r_{j0}}, \quad \angle g_{ij}(j\omega) = \beta_i - \alpha_j$$

g_{ij} je element matrice \mathbf{G} .

- U fazorskoj notaciji sinusoidni vremenski odziv je:

$$y_i(\omega) = \sum_j g_{ij}(j\omega)r_j(\omega)$$

gdje su:

$$r_j(\omega) = r_{j0}e^{j\alpha_j}, \quad y_i(\omega) = y_{i0}e^{j\beta_i}$$

- Ovdje se kao argument koristi ω (ne $j\omega$), $r_j(\omega)$ i $y_i(\omega)$ su kompleksni brojevi predstavljeni na svakoj frekvenciji ω čije su amplitude i faze dane izrazima na početku slajda.



Frekvencijski odziv MIMO sistema



- Ukupni odziv na istovremeno narinute ulazne signale iste frekvencije jednak je sumi pojedinačnih odziva (princip superpozicije):

$$y(\omega) = g_{i1}(j\omega)r_1(\omega) + g_{i2}(j\omega)r_2(\omega) + \dots = \sum_j g_{ij}(j\omega)r_j(\omega)$$

ili u matičnom zapisu: $y(\omega) = G(j\omega)r(\omega)$

- Vektori ulaznih i izlaznih signala:

$$r(\omega) = \begin{bmatrix} r_1(\omega) \\ r_2(\omega) \\ \vdots \\ r_j(\omega) \\ \vdots \\ r_m(\omega) \end{bmatrix}, \quad y(\omega) = \begin{bmatrix} y_1(\omega) \\ y_2(\omega) \\ \vdots \\ y_i(\omega) \\ \vdots \\ y_l(\omega) \end{bmatrix}$$

Frekvencijski odziv MIMO sistema

Pojačanje

SISO sistem

$$|G(j\omega)| = \left| \frac{y(\omega)}{r(\omega)} \right| = \left| \frac{G(j\omega)r(\omega)}{r(\omega)} \right| = \frac{y_0}{r_0}$$

- Pojačanje ovisi samo o **frekvenciji** ω .

MIMO sistem (euklidska 2-norma)

$$\frac{\|y(\omega)\|_2}{\|r(\omega)\|_2} = \frac{\|G(j\omega)r(\omega)\|_2}{\|r(\omega)\|_2} = \frac{\sqrt{y_{10}^2 + y_{20}^2 + \dots}}{\sqrt{r_{10}^2 + r_{20}^2 + \dots}}$$

- Pojačanje ovisi o **frekvenciji** ω , ali i o **pravcu ulaza** r .



Frekvencijski odziv MIMO sistema

Pojačanje

Amplituda vektora ulaznog signala na ω :

$$\|\mathbf{r}(\omega)\|_2 = \sqrt{\sum_i |r_i(\omega)|^2} = \sqrt{r_{10}^2 + r_{20}^2 + \dots}$$

Amplituda vektora izlaznog signala na ω :

$$\|\mathbf{y}(\omega)\|_2 = \sqrt{\sum_i |y_i(\omega)|^2} = \sqrt{y_{10}^2 + y_{20}^2 + \dots}$$

- Pojačanja SISO i MIMO sistema ne ovise o amplitudi ulaznog signala.
- Kod MIMO sistema ulaz i izlaz su vektori te se moraju sumirati amplitude elemenata svakog vektora pomoću norme.



Frekvencijski odziv MIMO sistema

Primjer 2. Zadan je sistem s dva ulaza $\mathbf{r} = [r_{10} \ r_{20}]^T$ i dva izlaza $\mathbf{y} = [y_{10} \ y_{20}]^T$ sa matricom prijenosa:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

- Za ulazne pobude:

$$\mathbf{r}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{r}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{r}_3 = \begin{bmatrix} 0.707 \\ 0.707 \end{bmatrix}, \mathbf{r}_4 = \begin{bmatrix} 0.707 \\ -0.707 \end{bmatrix}, \mathbf{r}_5 = \begin{bmatrix} 0.6 \\ -0.8 \end{bmatrix},$$

potrebno je izračunati pojačanja sistema.

- Odzivi sistema na navedene pobude su:

$$\mathbf{y}_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}, \mathbf{y}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{y}_3 = \begin{bmatrix} 6.36 \\ 3.54 \end{bmatrix}, \mathbf{y}_4 = \begin{bmatrix} 0.707 \\ 0.707 \end{bmatrix}, \mathbf{y}_5 = \begin{bmatrix} -0.2 \\ 0.2 \end{bmatrix}$$



Frekvencijski odziv MIMO sistema

- Svi ulazi imaju jednaku amplitudu, ali različite pravce:

$$\|\mathbf{r}\|_2 = 1$$

- Amplitude izlaza su:

$$\|\mathbf{y}_1\|_2 = 5.83, \|\mathbf{y}_2\|_2 = 4.47, \|\mathbf{y}_3\|_2 = 7.30, \|\mathbf{y}_4\|_2 = 1.00, \|\mathbf{y}_5\|_2 = 0.28$$

- **Maksimalna i minimalna vrijednost pojačanja predstavljaju maksimalnu i minimalnu singularnu vrijednost od G :**

$$\bar{\sigma}(G) = \max_{\mathbf{r} \neq \mathbf{0}} \frac{\|G\mathbf{r}\|_2}{\|\mathbf{r}\|_2} = \max_{\|\mathbf{r}\|_2=1} \|G\mathbf{r}\|_2$$

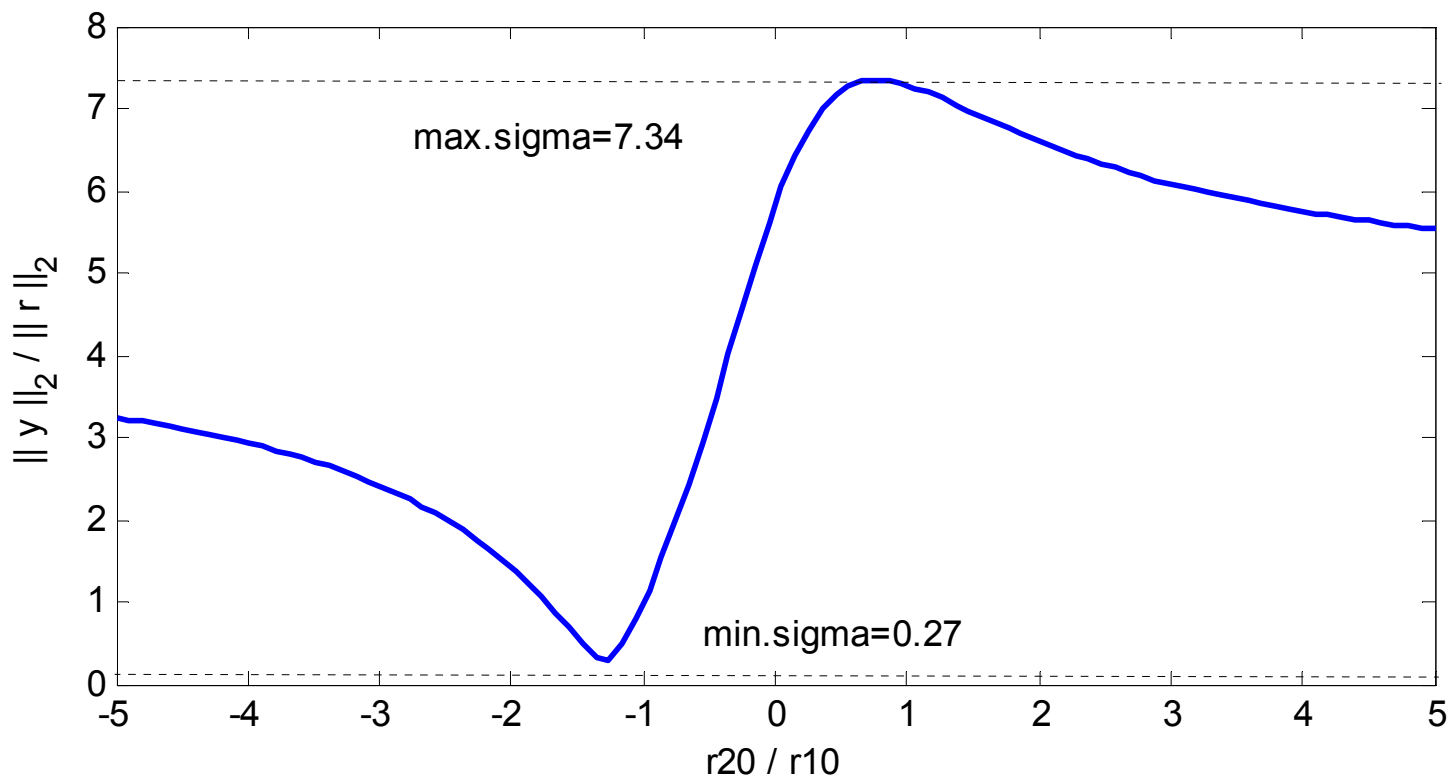
$$\underline{\sigma}(G) = \min_{\mathbf{r} \neq \mathbf{0}} \frac{\|G\mathbf{r}\|_2}{\|\mathbf{r}\|_2} = \min_{\|\mathbf{r}\|_2=1} \|G\mathbf{r}\|_2$$



Frekvencijski odziv MIMO sistema

- Ovisnost pojačanja o pravcu ulaza:

$$\frac{\|y\|_2}{\|r\|_2} = f\left(\frac{r_{20}}{r_{10}}\right)$$



- Pojačanje se mijenja od 0.27 do 7.34.

Svojstvene vrijednosti MIMO sistema

- Svojstvene vrijednosti mjere pojačanja za specijalan slučaj kada ulazi i izlazi imaju isti pravac, tzv. pravac svojstvenih vektora – ovo je korisno za analizu stabilnosti, ali ne i za performanse.
- Za generalizaciju pojačanja za MIMO sisteme neophodan je koncept **norme matrice**, tj. zadovoljavanje svojstava:

$$\| \mathbf{G}_1 + \mathbf{G}_2 \| \leq \| \mathbf{G}_1 \| + \| \mathbf{G}_2 \|$$

nejednakost trokuta

$$\| \mathbf{G}_1 \mathbf{G}_2 \| \leq \| \mathbf{G}_1 \| \cdot \| \mathbf{G}_2 \|$$

multiplikativnost



Svojstvene vrijednosti MIMO sistema

- **Maksimalna svojstvena vrijednost** $\rho(\mathbf{G}) = |\lambda_{\max}(\mathbf{G})|$ (spektralni radijus) **nije norma**.
- **Maksimalna singularna vrijednost** $\bar{\sigma}(\mathbf{G})$ **jest norma**, koja se naziva inducirana 2-norma, odnosno $\|\mathbf{G}\|_{i2}$.
- Slijedi da svojstvene vrijednosti nisu dobra mjera pojačanja MIMO sistema.
- Zbog svojstava svojstvenih vrijednosti i činjenice da su pojačanja MIMO sistema frekvencijski ovisna, bolje je promatrati maksimalnu singularnu vrijednost, odnosno:

$$\bar{\sigma}(\mathbf{G}(j\omega))$$



Dekomponiranje singularnih vrijednosti

SVD (Singular Value Decomposition)

- Promatramo matricu \mathbf{G} za fiksnu frekvenciju ω , tada se ona može dekomponirati u SVD:

$$\mathbf{G} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^H$$

- $\mathbf{\Sigma}$ - $l \times m$ matrica sa $k = \min\{l, m\}$ ne-negativnih singularnih vrijednosti σ_i , $\mathbf{\Sigma} = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k)$
 $\bar{\sigma} = \sigma_1 > \sigma_2 > \dots > \sigma_k = \underline{\sigma}$
- \mathbf{U} - $l \times m$ unitarna matrica izlaznih vektora singularnih vrijednosti \mathbf{u}_i , $\mathbf{U} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_l)$.
- \mathbf{V} - $m \times m$ unitarna matrica ulaznih vektora singularnih vrijednosti \mathbf{v}_i , $\mathbf{V} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m)$..



Dekomponiranje singularnih vrijednosti



- Singularne vrijednosti su drugi korijeni svojstvenih vrijednosti od $\mathbf{G}^H \mathbf{G}$:

$$\sigma_i(\mathbf{G}) = \sqrt{\lambda_i(\mathbf{G}^H \mathbf{G})} = \sqrt{\lambda_i(\mathbf{G} \mathbf{G}^H)}$$

$$(\mathbf{G} \mathbf{G}^H) \mathbf{U} = \mathbf{U} \mathbf{\Sigma} \mathbf{\Sigma}^H, \quad (\mathbf{G}^H \mathbf{G}) \mathbf{V} = \mathbf{V} \mathbf{\Sigma}^H \mathbf{\Sigma}$$

- Primjer SVD-a: $\mathbf{G} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{U}} \underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{\Sigma}} \underbrace{\begin{bmatrix} \cos \theta_2 & \pm \sin \theta_2 \\ -\sin \theta_2 & \pm \cos \theta_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{V}^H}^H$

- Ulazno-izlazna interpretacija:

$$\mathbf{G} = \mathbf{U} \mathbf{\Sigma} \mathbf{V}^H \Rightarrow \mathbf{G} \mathbf{V} = \mathbf{U} \mathbf{\Sigma} \quad (\mathbf{V}^H \mathbf{V} = \mathbf{I}) \Rightarrow \mathbf{G} \mathbf{v}_i = \sigma_i \mathbf{u}_i$$

pravac ulaza \mathbf{v}_i daje pravac izlaza \mathbf{u}_i s pojačanjem σ_i

Dekomponiranje singularnih vrijednosti

Pravci ulaza i izlaza

- Stupci matrice U (vektori), označeni sa \mathbf{u}_i , predstavljaju **pravce izlaza** procesa.
- Oni su ortogonalni i jedinične su duljine (ortonormalni):

$$\|\mathbf{u}_i\|_2 = \sqrt{|u_{i1}|^2 + |u_{i2}|^2 + \dots + |u_{il}|^2} = 1$$

$$\mathbf{u}_i^H \mathbf{u}_i = 1, \quad \mathbf{u}_i^H \mathbf{u}_j = 0, \quad i \neq j$$

- Stupci matrice V su ortogonalni i ortonormalni vektori i predstavljaju **pravce ulaza** procesa:

$$\|\mathbf{v}_i\|_2 = \sqrt{|v_{i1}|^2 + |v_{i2}|^2 + \dots + |v_{im}|^2} = 1$$



Dekomponiranje singularnih vrijednosti

Pravci ulaza i izlaza

- Budući da su $\|\mathbf{u}_i\|_2 = 1$ i $\|\mathbf{v}_i\|_2 = 1$ slijedi:

$$\sigma_i(\mathbf{G}) = \frac{\|\mathbf{G}\mathbf{v}_i\|_2}{\|\mathbf{v}_i\|_2}$$

Maksimalne i minimalne singularne vrijednosti

- **Najveća vrijednost pojačanja** za bilo koji pravac ulaza jednaka je maksimumu singularne vrijednosti:

$$\max_{\mathbf{r} \neq 0} \frac{\|\mathbf{G}\mathbf{r}\|_2}{\|\mathbf{r}\|_2} = \frac{\|\mathbf{G}\mathbf{v}_1\|_2}{\|\mathbf{v}_1\|_2} = \sigma_1(\mathbf{G}) \cong \bar{\sigma}(\mathbf{G})$$

Dekomponiranje singularnih vrijednosti

- **Najmanja vrijednost pojačanja** za bilo koji pravac ulaza jednaka je minimumu singularne vrijednosti:

$$\min_{\mathbf{r} \neq 0} \frac{\|\mathbf{G}\mathbf{r}\|_2}{\|\mathbf{r}\|_2} = \frac{\|\mathbf{G}\mathbf{v}_k\|_2}{\|\mathbf{v}_k\|_2} = \sigma_k(\mathbf{G}) \cong \underline{\sigma}(\mathbf{G})$$

gdje je $k = \min\{l, m\}$.

- Za bilo koji \mathbf{r} imamo da je:

$$\underline{\sigma}(\mathbf{G}) \leq \frac{\|\mathbf{G}\mathbf{r}\|_2}{\|\mathbf{r}\|_2} \leq \bar{\sigma}(\mathbf{G})$$

- Definirajmo $\mathbf{u}_1 = \bar{\mathbf{u}}, \mathbf{v}_1 = \bar{\mathbf{v}}, \mathbf{u}_k = \underline{\mathbf{u}}, \mathbf{v}_k = \underline{\mathbf{v}}$, tada slijedi:

$$\mathbf{G}\bar{\mathbf{v}} = \bar{\sigma}\bar{\mathbf{u}}, \quad \mathbf{G}\underline{\mathbf{v}} = \underline{\sigma}\underline{\mathbf{u}}$$

Dekomponiranje singularnih vrijednosti

- Neke od prednosti **dekomponiranja singularnih vrijednosti** (SVD) u odnosu na **dekompoziciju svojstvenih vrijednosti** za analizu pojačanja i usmjerenosti (pravaca) MIMO procesa su:
 - **Singularne vrijednosti daju dobre informacije o pojačanjima sistema.**
 - **Pravci sistema dobiveni korištenjem SVD su ortogonalni.**
 - **SVD se također direktno primjenjuje i za nekvadratne sisteme, odnosno sisteme koji nisu opisani kvadratnom matricom.**



Dekomponiranje singularnih vrijednosti

Primjer 3. Promatrajmo sistem iz primjera 2.:

$$\mathbf{G}_1 = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$



- Dekomponiranje singularnih vrijednosti od \mathbf{G}_1 daje:

$$\mathbf{G}_1 = \underbrace{\begin{bmatrix} 0.872 & 0.490 \\ 0.490 & -0.872 \end{bmatrix}}_U \underbrace{\begin{bmatrix} 7.343 & 0 \\ 0 & 0.272 \end{bmatrix}}_\Sigma \underbrace{\begin{bmatrix} 0.794 & -0.608 \\ 0.608 & 0.794 \end{bmatrix}}_{V^H}^H$$

- Najveći iznos pojačanja 7.343 dobiva se za pravac ulaza $\bar{\mathbf{v}} = [0.794 \quad 0.608]^T$
- Najmanji iznos pojačanja 0.272 dobiva se za pravac ulaza $\underline{\mathbf{v}} = [-0.608 \quad 0.794]^T$
- Sistem je interaktivan.



Kondicioni broj

Kondicioni broj (engl. Condition number)

- Definiran je omjerom maksimalne i minimalne singularnih vrijednosti:

$$\gamma(\mathbf{G}) = \frac{\bar{\sigma}(\mathbf{G})}{\underline{\sigma}(\mathbf{G})}$$

- Za sistem se kaže da je **slabo uvjetovan** (engl. ill-conditioned) ako neke kombinacija ulaza imaju jak utjecaj na izlaze, dok ostale kombinacije imaju slab utjecaj na izlaze sistema ($\gamma(\mathbf{G}) \gg 1$).
- **Da bi se ovo kompenziralo, regulator mora imati širok dijapazon različitih iznosa pojačanja u različitim pravcima.**
- U primjeru 2. ovaj broj iznosi $\gamma = 7.343 / 0.272 = 27$.

Kondicioni broj

- **Primjer 4.** Promatrajmo model u prostoru stanja destilacijske kolone:

$$G = \begin{bmatrix} 87.8 & -86.4 \\ 108.2 & -109.6 \end{bmatrix}$$

- Budući da su elementi matrice G mnogo veći od 1 \Rightarrow nema problema sa ograničenjima ulaza.
- Dekomponiranje singularnih vrijednosti od G :

$$G = \underbrace{\begin{bmatrix} 0.625 & -0.781 \\ 0.781 & 0.625 \end{bmatrix}}_U \underbrace{\begin{bmatrix} 197.2 & 0 \\ 0 & 1.39 \end{bmatrix}}_\Sigma \underbrace{\begin{bmatrix} 0.707 & -0.708 \\ -0.708 & -0.707 \end{bmatrix}}_{V^H}^H$$

- Pojačanje u pravcu manjeg pojačanja je približno 1 (odgovara najmanjoj singularnoj vrijednosti).



Kondicioni broj

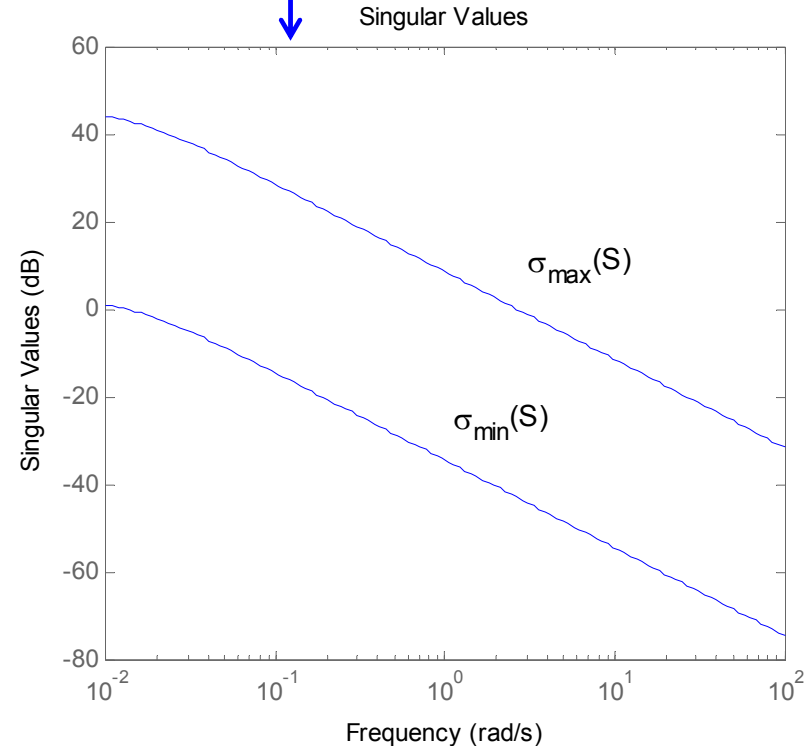
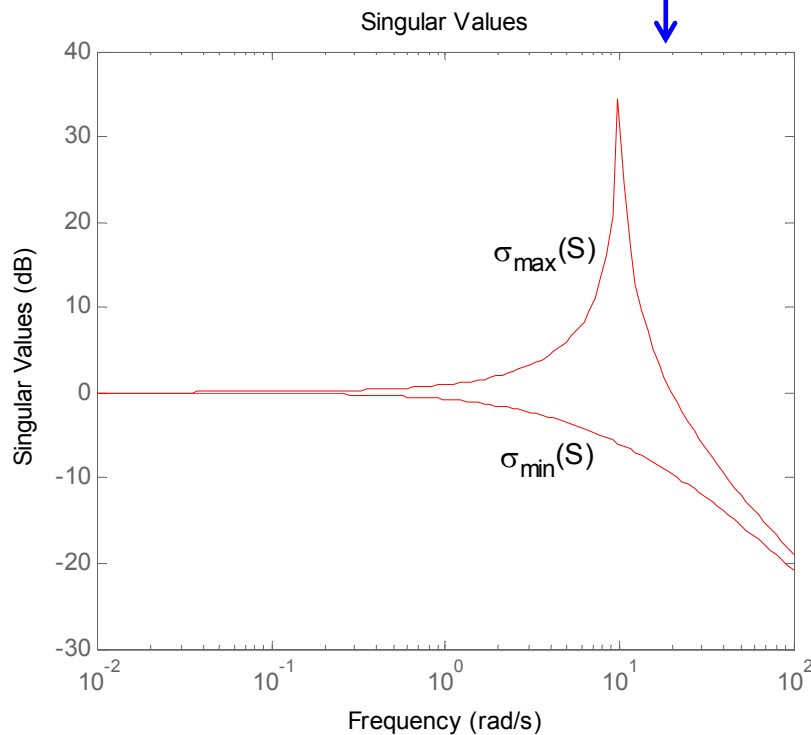
- Ovaj proces je slabo uvjetovan, budući da je:

$$\gamma = 197.2 / 1.39 = 141.17$$

- Za dinamičke sisteme singularne vrijednosti i njima pridruženi pravci mijenjaju se s promjenom frekvencije.

Okretanje satelita

Destilacijski proces





Singularne vrijednosti za performanse

- **Maksimalna singularna vrijednost je veoma korisna za analizu performansi i robusnosti u frekvencijskom području.**
- Pogreška u odnosu na referentnu veličinu:

$$e = Sr$$

- Mjera performansi SISO sistema:

$$\frac{e(\omega)}{r(\omega)} = S(\omega)$$

- Generalizacija na MIMO sisteme $\frac{\|e\|_2}{\|r\|_2}$ daje:

$$\underline{\sigma}(S(j\omega)) \leq \frac{\|e(\omega)\|_2}{\|r(\omega)\|_2} \leq \bar{\sigma}(S(j\omega))$$

Singularne vrijednosti za performanse

- **Za performanse želimo** da pojačanje $\|e\|_2 / \|r\|_2$ bude malo za bilo koji pravac $r(\omega)$.
- Za ocjenu performansi uvodi se težina $w_P(j\omega)$ takva da je zahtjev na performanse:

$$\frac{\|e(\omega)\|_2}{\|r(\omega)\|_2} \leq \frac{1}{|w_P(j\omega)|}, \quad \forall \omega \Rightarrow \bar{\sigma}(\mathcal{S}) \leq \frac{1}{|w_P|}, \quad \forall \omega$$

- Sa skalarnom težinom performansi w_P imamo:

$$\bar{\sigma}(\mathcal{S}(j\omega)) \leq \frac{1}{|w_P(j\omega)|}, \quad \forall \omega \Leftrightarrow \bar{\sigma}(w_P \mathcal{S}) \leq 1, \quad \forall \omega$$





H_∞ norma

- Za analizu performansi zasnovanoj na singularnim vrijednostima potrebno je definirati **H_∞ normu**.
- H_∞ norma predstavlja vršnu vrijednost maksimalne singularne vrijednosti frekvencijskog odziva:

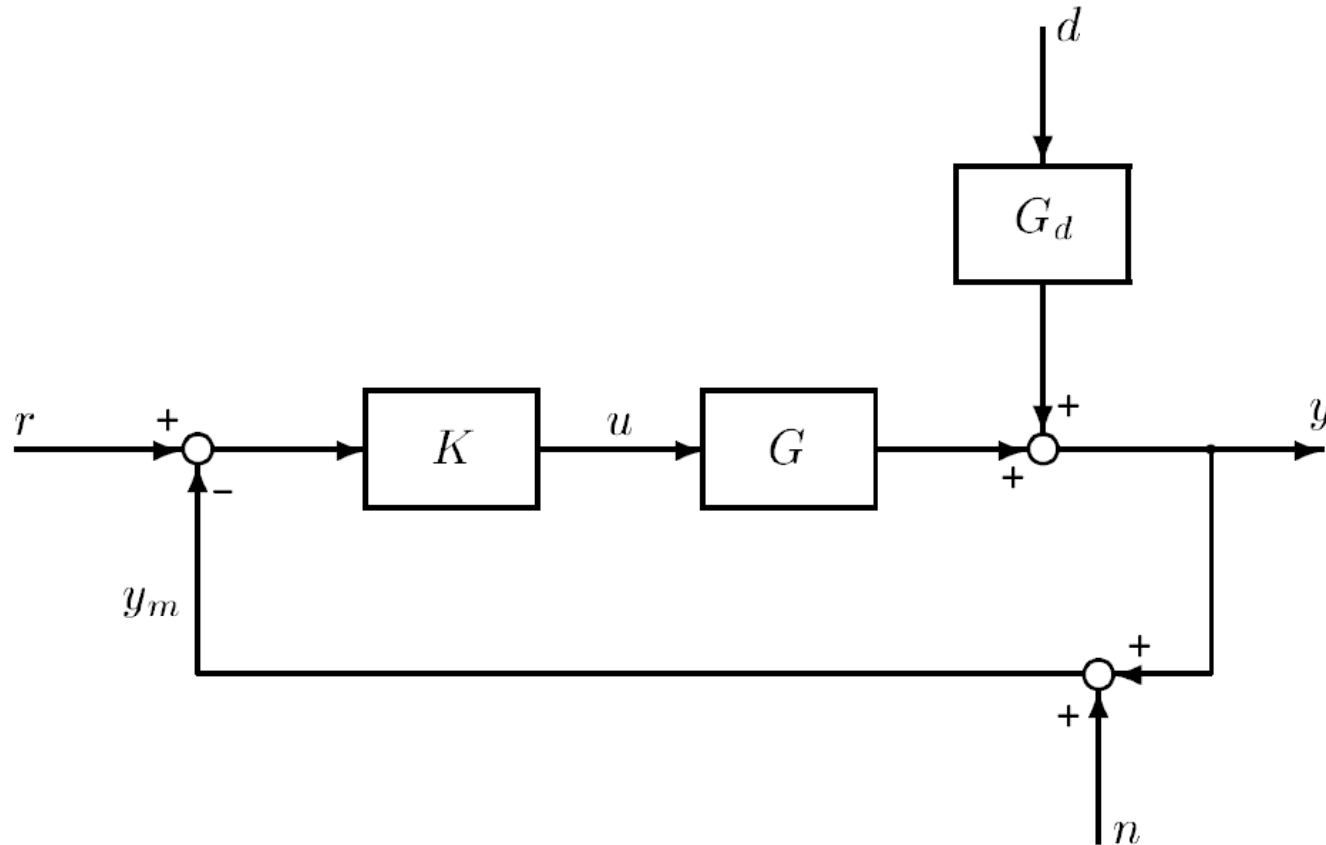
$$\|P(s)\|_\infty = \sup_{\omega} \bar{\sigma}(P(j\omega))$$

- Zahtjev na performanse korespondira ograničenju na H_∞ normu:

$$\bar{\sigma}(w_P \mathcal{S}) \leq 1, \forall \omega \iff \|w_P \mathcal{S}\|_\infty \leq 1$$

Upravljanje MIMO procesima

- Konfiguracija sistema s jednim stupnjem slobode



- Postoji više načina MIMO upravljanja.

Upravljanje MIMO procesima

1) Pretkompenzator: dizajn pretkompenzatora $W_1(s)$ s kojim se dobiva novi oblik procesa:

$$G_s(s) = G(s)W_1(s)$$

kojeg je lakše upravljati.

- Nakon toga slijedi sinteza regulatora koji se sastoji od kompenzatora i dijagonalnog regulatora $K_s(s)$:

$$K(s) = W_1(s)K_s(s) = \text{diag}(k_1(s) \ k_2(s) \ \dots \ k_m(s))$$

- Kompenzator $W_1(s)$ je obično konstantna matrica dobivena invertiranjem realne aproksimacije $G(j\omega)$ u zadanoj frekvenciji ω .

Upravljanje MIMO procesima

- Dijagonalni regulator $K_s(s)$ je multivarijabilni regulator dizajniran postupkom optimiranja (optimiranje H_∞).

2) Rasprezanje (engl. decoupling)

- Dobiva se izborom kompenzatora koji omogućuje da je G_s dijagonalna matrica u odabranoj frekvenciji.

Dinamičko rasprezanje: $G_s(s)$ dijagonalna za sve frekvencije.

$$K(s) = k(s)G^{-1}(s) \quad \text{inverse-based controller}$$

Steady-state rasprezanje: $G_s(0)$ je dijagonalna.

- Može se postići izborom konstantnog pretkompenzatora $W_1(s) = G^{-1}(0)$.

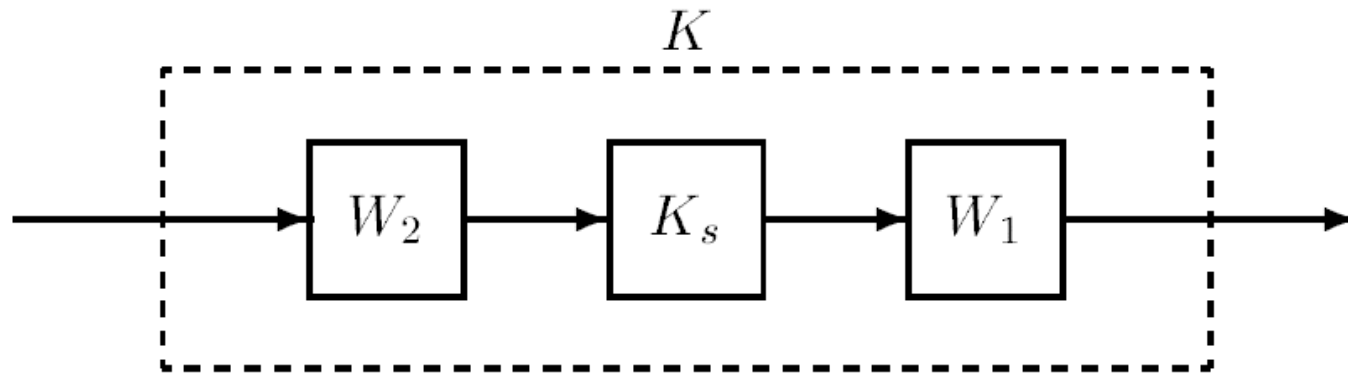
Upravljanje MIMO procesima



Aproksimativno raspredanje na frekvenciji ω_0 :
 $G_s(j\omega_0)$ je dijagonalna, ako je to moguće postići.

- Može se postići izborom konstantnog $W_1(s) = G_0^{-1}(0)$, gdje je G_0 realna aproksimacija od $G_0(j\omega_0)$.
- Dobar izbor za ω_0 je frekvencija propusnog opsega.

3) Pretkomentator i postkomentator



- Ukupni regulator $K(s)$:

$$K(s) = W_1(s)K_s(s)W_2(s) \quad K_s(s) \text{ je dijagonalan}$$



Upravljanje MIMO procesima

4) Decentralizirano upravljanje (dijagonalni reg.)

- Korištenje dijagonalnog ili blok-dijag. regulatora.
- Moguće ukoliko je $G(s)$ gotovo dijagonalna matrica, odnosno postoji mali broj elemenata koji su izvan glavne dijagonale i koji nemaju velike vrijednosti.
- Ako imaju velike iznose tada se decentraliziranim upravljanjem ne postižu dobre performanse.

5) Kompenzacija poremećaja: $e(s) = S(s)G_d(s)d(s)$

$$\bar{\sigma}(SG_d) = 1, \quad \forall \omega \Rightarrow SG_d = U_1 \Leftrightarrow \bar{\sigma}(U_1) = \underline{\sigma}(U_1) = 1$$

$$K(s) = G^{-1}(s)G_d(s)U_1^{-1}(s)$$

- ### 6) Direktna sinteza MIMO regulatora $K(s)$ zasnovana na minimiziranju određene funkcije cilja (npr. H_∞ optimalno upravljanje).



Polovi MIMO sistema

- **Definicija 1.** Polovi p_i sistema u prostoru stanja:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}u\end{aligned}$$

su svojstvene vrijednosti $\lambda_i(\mathbf{A})$, $i = 1, \dots, n$ matrice \mathbf{A} . Karakteristični polinom $\phi(s)$ je definiran kao:

$$\phi(s) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \prod_{i=1}^n (s - p_i)$$

Slijedi da su polovi korijeni karakteristične jednačbe:

$$\phi(s) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0$$

Polovi MIMO sistema

Polovi i stabilnost

- **Teorem 1.** Linearni dinamički sistem $\dot{x} = Ax + Bu$ je stabilan ako i samo ako su svi njegovi polovi smješteni u lijevoj poluravnini (LHP), to jest ako je $\text{Re}\{\lambda_i(A)\} < 0, \forall i$. Matrica koja posjeduje ova svojstva naziva se **stabilna ili Hurwitzova**.

Polovi funkcije prijenosa

- **Teorem 2.** Polinom polova $\phi(s)$ koji odgovara minimalnoj realizaciji sistema sa funkcijom prijenosa $G(s)$ predstavlja najmanji zajednički imenitelj svih neidentičnih nul-minora svih redaka od $G(s)$.



Polovi MIMO sistema

Polovi funkcije prijenosa

Primjer 5. Zadan je sistem:

$$\mathbf{G}(s) = \frac{1}{1.25(s+1)(s+2)} \begin{bmatrix} s-1 & s \\ -6 & s-2 \end{bmatrix}$$

- Minori reda 1 su četiri elementa koji imaju nazivnik $(s+1)(s+2)$.
- Minor reda 2 je:

$$\det \mathbf{G}(s) = \frac{(s-1)(s-2) + 6s}{1.25^2 (s+1)^2 (s+2)^2} = \frac{1}{1.25^2 (s+1)(s+2)}$$

- Najmanji zajednički imenitelj svih minora je:

$$\phi(s) = (s+1)(s+2)$$

- Minimalna realizacija ima polove: $s = -1$, $s = -2$



Polovi MIMO sistema

Polovi funkcije prijenosa

Primjer 6. Promatrajmo 2×3 sistem, sistem sa 3 ulaza i 2 izlaza:



$$\mathbf{G}(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)(s-1)} \begin{bmatrix} (s-1)(s+2) & 0 & (s-1)^2 \\ -(s+1)(s+2) & (s-1)(s+1) & (s-1)(s+1) \end{bmatrix}$$

- Minori reda 1: $\frac{1}{s+1}$, $\frac{s-1}{(s+1)(s+2)}$, $-\frac{1}{s-1}$, $\frac{1}{s+2}$, $\frac{1}{s+2}$
- Minor reda 2 dobiva se brisanjem drugog stupca i računanjem determinante tako dobivene $\mathbf{G}(s)$:

$$\begin{aligned} M_2 &= \frac{(s-1)(s+2)(s-1)(s+1) + (s+1)(s+2)(s-1)^2}{((s+1)(s+2)(s-1))^2} \\ &= \frac{2}{(s+1)(s+2)} \end{aligned}$$

Polovi MIMO sistema

Polovi funkcije prijenosa

- Preostala dva minora drugog reda, dobivena respektivnim brisanjem prvog i trećeg stupca, su:

$$M_1 = \frac{-(s-1)}{(s+1)(s+2)^2}, \quad M_3 = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$$

- Najmanji zajednički imenitelj:

$$\phi(s) = (s+1)(s+2)^2(s-1)$$

- Minimalna realizacija sistema ima četiri pola:

$$s_1 = -1, \quad s_2 = 1, \quad s_{3,4} = -2$$





Nule MIMO sistema

- **Definicija 2.** z_i je nula sistema $G(s)$ ako je rang od $G(z_i)$ manji od normalnog ranga od $G(s)$. Polinom nula definiran je kao:

$$z(s) = \prod_{i=1}^{n_z} (s - z_i)$$

gdje je n_z broj nula od $G(s)$ s konačnim vrijednostima.

Nule sistema u prostoru stanja

- Jednadžbe sistema u prostoru stanja:

$$P(s) \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix}, \quad P(s) = \begin{bmatrix} sI - A & -B \\ C & D \end{bmatrix}$$

Nule MIMO sistema

- Nule su vrijednosti $s = z$ za koju polinomska matrica sistema $P(s)$ gubi rang, dajući nulu na izlazu za neke ne-nulte ulaze:

$$\begin{bmatrix} zI - A & -B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_z \\ u_z \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

- **Nule funkcije prijenosa**
- **Definicija 3.** z_i je nula sistema $G(s)$ ako je rang od $G(z_i)$ manji od normalnog ranga od $G(s)$. Polinom nula definiran je kao $z(s) = \prod_{i=1}^{n_z} (s - z_i)$, gdje je n_z broj nula od $G(s)$ s konačnim vrijednostima.



Nule MIMO sistema

Nule funkcije prijenosa

- **Teorem 3.** Polinom nula $z(s)$, koji odgovara minimalnoj realizaciji sistema, predstavlja najveći zajednički djelitelj svih brojnika minora reda r od $\mathbf{G}(s)$, gdje je r normalni rang od $\mathbf{G}(s)$, omogućujući podešavanje ovih minora na način da imaju polinom polova $\phi(s)$ kao svoje nazivnike.

Primjer 7. Promatrajmo sistem opisan matričnom funkcijom prijenosa dimenzija 2×2 :

$$\mathbf{G}(s) = \frac{1}{s+2} \begin{bmatrix} s-1 & 4 \\ 4.5 & 2(s-1) \end{bmatrix}$$

- Normalni rang matrice: 2.

Nule MIMO sistema

Nule funkcije prijenosa

- Minor reda 2:

$$\mathbf{G}(s) = \frac{2(s-1)^2 - 18}{(s+2)^2} = 2 \frac{s-4}{s+2}$$

- Polinom polova:

$$\phi(s) = s + 2$$

- Polinom nula:

$$z(s) = s - 4$$

- Napomena: multivarijabilne nule nemaju veze sa nulama elemenata funkcije prijenosa.



Nule MIMO sistema

Nule funkcije prijenosa

Primjer 8. Promatrajmo sistem:

$$\mathbf{G}(s) = \frac{1}{1.25(s+1)(s+2)} \begin{bmatrix} s-1 & s \\ -6 & s-2 \end{bmatrix}$$

- Minor reda 2 je determinanta:

$$\det \mathbf{G}(s) = \frac{(s-1)(s-2) + 6s}{1.25^2 (s+1)^2 (s+2)^2} = \frac{1}{1.25^2 (s+1)(s+2)}$$

- Polinom polova: $\phi(s) = 1.25^2 (s+1)(s+2)$
- Polinom nula = brojnik od $\det \mathbf{G}(s)$.
- Slijedi da nema multivarijabilnih nula.



Nule MIMO sistema

Nule funkcije prijenosa

Primjer 9. Promatrajmo sistem:

$$\mathbf{G}(s) = \begin{bmatrix} \frac{s-1}{s+1} & \frac{s-2}{s+2} \end{bmatrix}$$

- Normalni rang od $\mathbf{G}(s)$ je 1.
- Ne postoji s za koji je $\mathbf{G}(s) = 0$, odnosno za koji bi oba elementa od $\mathbf{G}(s)$ poprimila nulte vrijednosti $\Rightarrow \mathbf{G}(s)$ nema nula.

Primjer 10. Promatrajmo sistem:

$$\mathbf{G}(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)(s-1)} \begin{bmatrix} (s-1)(s+2) & 0 & (s-1)^2 \\ -(s+1)(s+2) & (s-1)(s+1) & (s-1)(s+1) \end{bmatrix}$$

Nule MIMO sistema

Nule funkcije prijenosa

- Podesimo njene mirore M_1 , M_2 i M_3 tako da su njihovi nazivnici:

$$\phi(s) = (s + 1)(s + 2)^2 (s - 1)$$

- Tada imamo:

$$M_1(s) = -\frac{(s-1)^2}{\phi(s)}, \quad M_2(s) = \frac{2(s-1)(s+2)}{\phi(s)}, \quad M_3(s) = \frac{(s-1)(s+2)}{\phi(s)}$$

- Zajednički faktor za ove minore je polinom nula:

$$z(s) = (s - 1)$$

- Slijedi da sistem ima RHP nulu (pojedinačnu) u $s = 1$.



Pravci polova i nula MIMO sistema

- Matricu \mathbf{G} promatramo kao kompleksnu matricu u prostoru stanja: $\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}$

Pravci nula

- Neka $\mathbf{G}(s)$ ima nulu u $s = z$, tada $\mathbf{G}(s)$ gubi rang u $s = z$ i postoje ne-nulti vektori \mathbf{u}_z i \mathbf{y}_z takvi da je:

$$\mathbf{G}(z)\mathbf{u}_z = \mathbf{0}, \quad \mathbf{y}_z^H \mathbf{G}(z) = \mathbf{0}$$

\mathbf{u}_z – vektor ulaznih pravaca nula

\mathbf{y}_z – vektor izlaznih pravaca nula

- \mathbf{y}_z je važniji jer daje informacije o tome koji izlaz (ili kombinacija izlaza) može biti problematičan za upravljanje.
- Vektori \mathbf{u}_z i \mathbf{y}_z mogu se naći iz SVD od $\mathbf{G}(z) = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^H$.

Pravci polova i nula MIMO sistema

Pravci nula

- u_z = zadnji stupac matrice V (odgovara nultoj singularnoj vrijednosti od $G(z)$), y_z = zadnji stupac od U .

Primjer 11. Promatrajmo sistem:

$$G(s) = \frac{1}{(0.2s + 1)(s + 1)} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 + 2s & 2 \end{bmatrix}$$

- Proces (sistem) ima multivarijabilnu nulu $z = 0.5$, tj. $G(s)$ gubi rang u $s = 0.5$.
- Dekompozicija singularnih vrijednosti od $G(s)$ daje:

$$G(0.5) = \frac{1}{1.65} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0.45 & 0.89 \\ 0.89 & -0.45 \end{bmatrix}}_U \underbrace{\begin{bmatrix} 1.92 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_\Sigma \underbrace{\begin{bmatrix} 0.71 & -0.71 \\ 0.71 & 0.71 \end{bmatrix}^H}_{V^H}$$

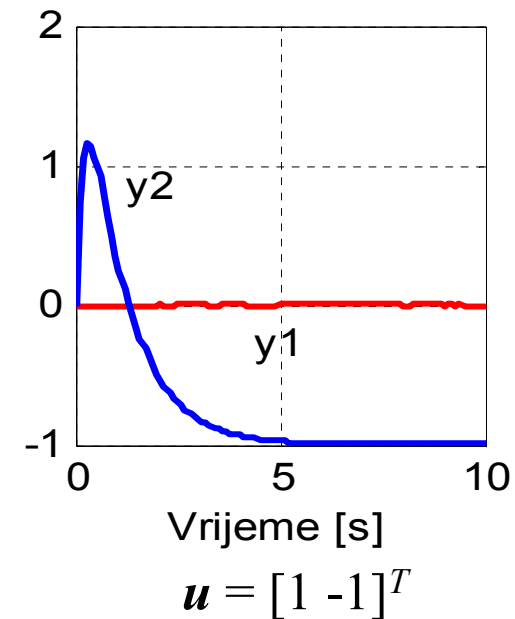
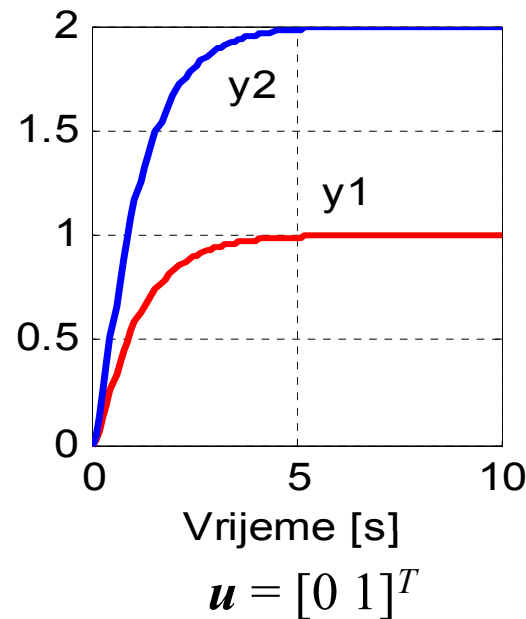
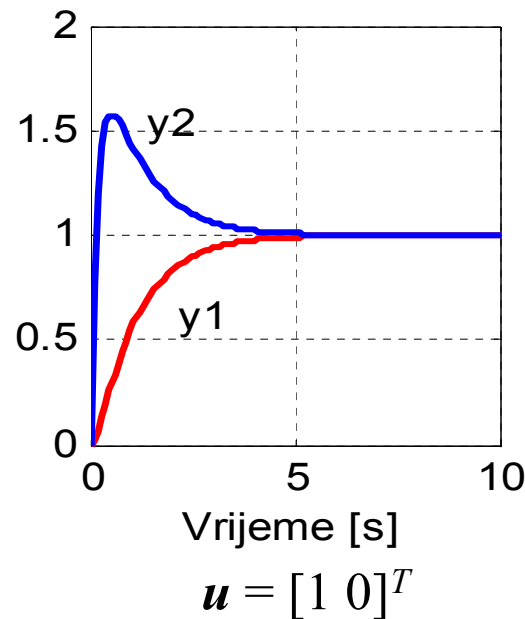
$$u_z = \begin{bmatrix} -0.71 \\ 0.71 \end{bmatrix}$$
$$y_z = \begin{bmatrix} 0.89 \\ -0.45 \end{bmatrix}$$



Pravci polova i nula MIMO sistema

Pravci nula

- Odzivi sistema na pojedinačne skokovite pobude



- RHP nula je povezana sa oba ulaza i oba izlaza.
- Prisustvo RHP nule je uočljivo na trećoj slici kod istovremenih promjena u pravcu djelovanja prvog i drugog ulaza $\Rightarrow y_2$ iskazuje inverzni odziv dok y_1 nastoji zadržati nultu vrijednost pri promjeni djelovanja ulaza.



Pravci polova i nula MIMO sistema

Pravci polova

- Neka $G(s)$ ima pol u $s = p$, tada $G(s)$ poprima konačne vrijednosti i vrijedi:

$$G(p)u_p = \infty, \quad y_p^H G(p) = \infty$$

u_p – vektor ulaznih pravaca polova

y_p – vektor izlaznih pravaca polova

- u_p i y_p dobivaju se korištenjem SVD-a od $G(p)$; u_p = prvi stupac matrice V (odgovara konačnoj singularnoj vrijednosti od $G(p)$), y_p = prvi stupac od U .



Pravci polova i nula MIMO sistema

Pravci polova

Primjer 12. Promatrajmo proces koji ima RHP nulu $z = 4$ i LHP pol $p = -2$:

$$\mathbf{G}(s) = \frac{1}{s+2} \begin{bmatrix} s-1 & 4 \\ 4.5 & 2(s-1) \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{G}(z) = \mathbf{G}(4) &= \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4.5 & 6 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0.55 & -0.83 \\ 0.83 & 0.55 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9.01 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.6 & -0.8 \\ 0.8 & 0.6 \end{bmatrix}^H \end{aligned}$$

$$\mathbf{u}_z = \begin{bmatrix} -0.8 \\ 0.6 \end{bmatrix} \quad \mathbf{y}_z = \begin{bmatrix} -0.83 \\ 0.55 \end{bmatrix}$$



Pravci polova i nula MIMO sistema

Pravci polova

- Za određivanje pravaca polova koristi se:

$$\mathbf{G}(p + \varepsilon) = \mathbf{G}(-2 + \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^2} \begin{bmatrix} -3 + \varepsilon & 4 \\ 4.5 & 2(-3 + \varepsilon) \end{bmatrix}$$

- SVD za $\varepsilon \rightarrow 0$ daje:

$$\mathbf{G}(-2 + \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^2} \begin{bmatrix} -0.55 & -0.83 \\ 0.83 & -0.55 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9.01 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.6 & -0.8 \\ -0.8 & -0.6 \end{bmatrix}^H$$

$$\mathbf{u}_p = \begin{bmatrix} 0.6 \\ -0.8 \end{bmatrix} \quad \mathbf{y}_p = \begin{bmatrix} -0.55 \\ 0.83 \end{bmatrix}$$

- **Lokacije polova i nula su neovisne o skaliranju ulaza i izlaza, dok to nije slučaj sa njihovim pravcima.**

RGA (engl. Relative Gain Array)

- Mjere (metrika) za kvantifikaciju stupnja usmjerenosti i razine interakcije MIMO sistema:
 - **Kondicioni broj,**
 - **RGA.**
- Kondicioni broj γ strogo ovisi o **skaliranju ulaza i izlaza.**
- Ako su D_1 i D_2 skalirajuće matrice, tada je moguće minimizirati (optimirati) kondicioni broj (optimalni):

$$\gamma^*(G) = \min_{D_1, D_2} \gamma(D_1 G D_2)$$

- Kondicioni broj može se koristiti kao mjera ulazno-izlazne upravljivosti.
- Ukoliko je on **velikog iznosa** tada imamo problem sa osjetljivošću na utjecaj neizvjesnosti.

RGA (engl. Relative Gain Array)

- RGA nesignularne kvadratne matrice G je kvadratna matrica definirana kao:

$$\mathbf{RGA}(G) = \mathbf{A}(G) \cong G \times (G^{-1})^T$$

gdje \times označava množenje element po element (Schur produkt).

- Za matricu dimenzija (2×2) sa elementima g_{ij} imamo:

$$\mathbf{A}(G) = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & 1 - \lambda_{11} \\ 1 - \lambda_{11} & \lambda_{11} \end{bmatrix}; \quad \lambda_{11} = \frac{1}{1 - \frac{g_{12}g_{21}}{g_{11}g_{22}}}$$

- RGA: neovisan o skaliranju ulaza i izlaza, suma elemenata u retcima (kao i stupcima) jednaka jedinici, njegova sum-norma $\|\mathbf{A}\|_{\text{sum}} \approx \gamma^*$, predstavlja matricu identiteta (jedinična) ako je G gornje(donje) trokutasta matrica.

RGA (engl. Relative Gain Array)

a) RGA je dobar indikator osjetljivosti na neizvjesnosti:

- 1. Neizvjesnost u ulaznim kanalima (dijagonalna ulazna neizvjesnost).** Procene sa velikim vrijednostima RGA oko frekvencije presjeka je teže upravljati zbog osjetljivosti na ovu vrstu neizvjesnosti, naprimjer, uzrokovanu neizvjesnošću ili zanemarenjem dinamike aktuatora. Upravljanje zasnovano na rasprezanju ili inverzno upravljanje ne mogu se koristiti u ovim slučajevima.
- 2. Neizvjesnost elementa.** Veliki iznosi RGA impliciraju osjetljivost na utjecaj neizvjesnosti jednog elementa upravljačkog kruga na drugi. Izvor ove vrste neizvjesnosti nastaje usljed fizičke sprege između elemenata u funkciji prijenosa.





RGA (engl. Relative Gain Array)

b) RGA i RHP nule:

- Ako se predznak RGA elementa mijenja kada s ide od 0 do ∞ , tada negdje postoji RHP nula.

c) Nekvadratni procesi (funkcija prijenosa nije kvadratna matrica):

- **Ekstra ulazi:** Ako je suma elemenata u stupcu RGA mala ($\ll 1$), tada se može razmatrati brisanje korespondentnog ulaza.
- **Ekstra izlazi:** Ako su svi elementi u retku RGA mali ($\ll 1$), tada se korespondentni izlaz ne može upravljati.

d) Dijagonalna dominantnost:

- RGA se može koristiti za mjerenje dijagonalne dominantnosti:

$$\text{RGA - broj} = \left\| \Lambda(\mathbf{G}) - \mathbf{I} \right\|_{\text{sum}}$$

RGA (engl. Relative Gain Array)

e) RGA i decentralizirano upravljanje

- 1. Integritet.** Za stabilne procese izbjegavati uparivanje ili RGA elemente u stacionarnom stanju sa negativnim vrijednostima. Inače, ako su regulatori u sistemu dizajnirani neovisno, tada interakcije mogu prouzročiti nestabilnost, kada su sve petlje zatvorene ili kada petlja kojoj odgovara relativno pojačanje s negativnom vrijednošću postane neaktivna.
- 2. Stabilnost.** Preferira se korištenje uparivanja kojemu odgovara RGA broj blizu 0 za frekvenciju presjeka.



64/108

RGA (engl. Relative Gain Array)

Primjer 13. Promatrajmo dijagonalni proces

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Tada je:

$$\Lambda(\mathbf{G}) = \mathbf{I}, \quad \gamma(\mathbf{G}) = \frac{\bar{\sigma}(\mathbf{G})}{\underline{\sigma}(\mathbf{G})} = \frac{100}{1} = 100, \quad \gamma^*(\mathbf{G}) = 1$$

- Kondicioni broj ima veliku vrijednost $\gamma(\mathbf{G}) = 100 \Rightarrow$ pojačanje procesa strogo ovisi o pravcu ulaza.
- Budući da je proces opisan dijagonalnom matricom \Rightarrow nema interakcije $\Lambda(\mathbf{G}) = \mathbf{I}$ i $\gamma^*(\mathbf{G}) = 1$, te je za očekivati da nema osjetljivosti na neizvjesnosti.



RGA (engl. Relative Gain Array)

Primjer 14. Promatrajmo trokutastu matricu

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Slijedi:

$$\mathbf{G}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{G}) = \mathbf{I}, \quad \gamma(\mathbf{G}) = \frac{\bar{\sigma}(\mathbf{G})}{\underline{\sigma}(\mathbf{G})} = \frac{2.41}{0.41} = 5.83, \quad \gamma^*(\mathbf{G}) = 1$$

- Za trokutastu matricu RGA je uvijek jedinična matrica i $\gamma^*(\mathbf{G})$ je uvijek jednak 1.

RGA (engl. Relative Gain Array)

Primjer 15. Promatrajmo proces koji u stacionarnom stanju ima funkciju prijenosa:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 87.8 & -86.4 \\ 108.2 & -109.6 \end{bmatrix}$$

- Slijedi:

$$\mathbf{G}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.399 & -0.315 \\ 0.394 & -0.320 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}(\mathbf{G}) = \begin{bmatrix} 35.1 & -34.1 \\ -34.1 & 35.1 \end{bmatrix}$$

- $\lambda(\mathbf{G}) = 197.2/1.391 = 141.7$ je malo veći od $\gamma^*(\mathbf{G}) = 138.268$.
- Suma elemenata u RGA matrici $\|\mathbf{A}\|_{\text{sum}} = 138.275$ što odgovara tvrdnji da je za (2×2) sisteme $\|\mathbf{A}\|_{\text{sum}} \approx \gamma^*$ kada $\gamma^*(\mathbf{G})$ ima veliku vrijednost.



RGA (engl. Relative Gain Array)

- Kondicioni broj γ ima veliku vrijednost, ali zbog činjenice da je minimalna singularna vrijednost $\underline{\sigma} = 1.391$ veća od 1, to samo po sebi neće prouzročiti probleme za upravljanje.
- Međutim, RGA elementi (i $\gamma^*(\mathbf{G})$) imaju velike vrijednosti, što indicira probleme za upravljanje, posebno u slučaju ako su ove vrijednosti velike u području oko frekvencije presjeka.



RGA (engl. Relative Gain Array)

Primjer 16. Promatrajmo (3×3) proces:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 16.8 & 30.5 & 4.30 \\ -16.7 & 31.0 & -1.41 \\ 1.27 & 54.1 & 5.40 \end{bmatrix}$$

- Slijedi:

$$\mathbf{A}(\mathbf{G}) = \begin{bmatrix} 1.5 & 0.99 & -1.48 \\ -0.41 & 0.97 & 0.45 \\ -0.08 & -0.95 & 2.03 \end{bmatrix}, \quad \gamma(\mathbf{G}) = \frac{69.6}{1.63} = 42.6, \quad \gamma^*(\mathbf{G}) = 7.80$$

- $\|\mathbf{A}\|_{\text{sum}} = 8.86$ je blizu γ^* .
- Sume elemenata po recima i stupcima matrice \mathbf{A} jednake su 1.
- $\underline{\sigma}(\mathbf{G})$ je veća od 1 i RGA elementi su relativno mali \Rightarrow nema indikacije problema za upravljanje procesom.



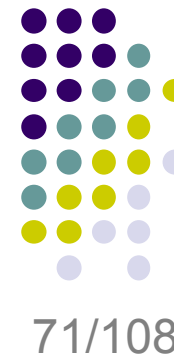
RGA (engl. Relative Gain Array)

- **Za detaljnu analizu performansi (analiza ulazno-izlazne upravljivosti), moraju se između ostalog, razmatrati singularne vrijednosti, RGA i kondicioni broj kao funkcije frekvencije.**
- **Područje oko frekvencije presjeka je također važno.**
- **Poremećaji (smetnje) i postojanje nestabilnih polova i nula (RHP) moraju se također uzeti u obzir pri analizi upravljačkih performansi.**



Stabilnost MIMO sistema

- **Definicija 4.** Sistem je (interno) stabilan ako niti jedna od njegovih komponenti ne sadrži skrivene nestabilne modove i da djelovanje ograničenih vanjskih signala na bilo kojem mjestu u sistemu rezultira ograničenim izlaznim signalima mjenjenim bilo gdje u sistemu. Riječ “interni” znači da sva stanja moraju biti stabilna, ne samo ulazi/izlazi.
- **Definicija 5. Stabilizacija stanja, detektibilnost stanja i skriveni nestabilni modovi.** Sistem je po stanjima stabiliziran ako su svi nestabilni modovi po stanjima upravljivi. Za sistem se kaže da su mu stanja detektibilna ako su svi nestabilni modovi osmotrivi po stanjima. Sistem sa nestabiliziranim i nedetektibilnim modovima sadrži skrivene nestabilne modove.



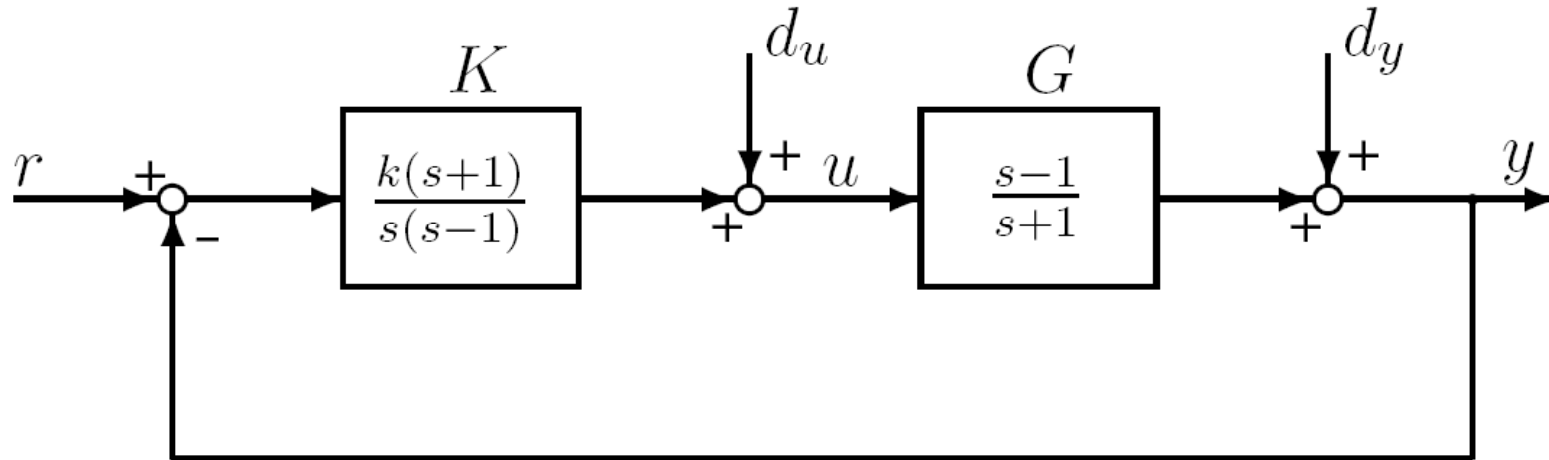
Stabilnost MIMO sistema

- Linearan sistem sa parom (A, B) može se po **stanjima stabilizirati** ako i samo ako postoji matrica F takva da je $A+FB$ stabilna (Hurwitz), to jest ako postoji povratna veza po stanju $u = Fx$ takva da je sistem stabilan. Ako sistem nije stabiliziran znači da matrica F ne postoji.
- Par (A, C) ima **detektabilna stanja** ako i samo ako postoji matrica L takva da je $A+LC$ stabilna (Hurwitz). Ako sistem nije detektibilan, tada postoje stanja u sistemu koja idu izvan granica i ne postoji način njihovog observiranja iz izlaza $y(t)$.
- **Bilo koji nestabilan linearni sistem može se stabilizirati upravljanjem sa povratnom vezom koje može osigurati da sistem ne sadrži skrivene nestabilne modove.**



Interna stabilnost

- Promatrajmo SISO sistem na slici.



- $L = GK \Rightarrow$ poništenje $(s-1)$ (RHP poništavanje polova/nula):

$$L = GK = \frac{k}{s}, \quad S = (I + L)^{-1} = \frac{s}{s + k}$$

- Slijedi da je $S(s)$, tj. funkcija prijenosa od d_y prema y stabilna.



Interna stabilnost

- Međutim, funkcija prijenosa od d_y prema y je nestabilna:

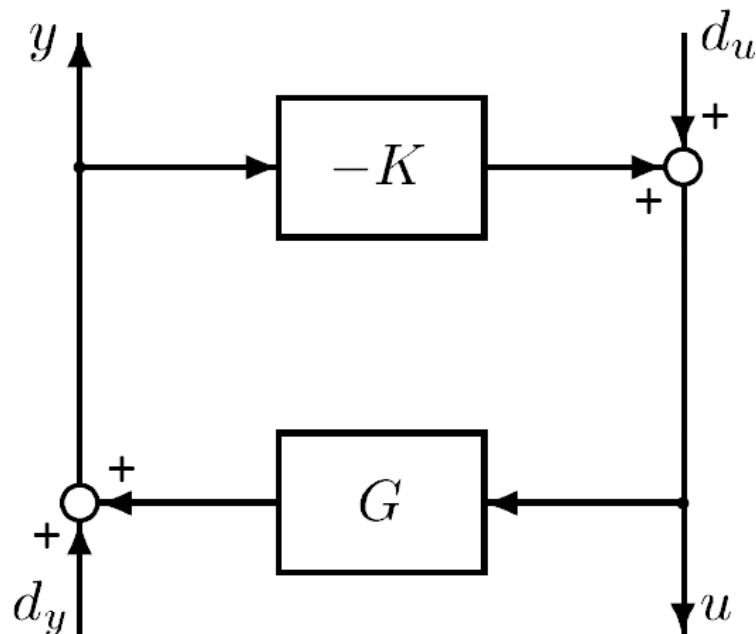
$$u = -K(I + GK)^{-1} d_y = -\frac{k(s+1)}{(s-1)(s+k)} d_y$$

- Slijedi da se za rigoroznu provjeru stabilnosti mora provesti procedura ispitivanja **interne stabilnosti**.
- Provjera polova od S i T nije dovoljna za određivanje interne stabilnosti.
- Za provjeru interne stabilnosti koristi se blokovski dijagram** na sljedećem slajdu.



Interna stabilnost

Provjera interne stabilnosti



Slika x

- Za internu stabilnost razmatra se:

$$\begin{aligned} u &= (I + KG)^{-1} d_u - K(I + GK)^{-1} d_y \\ y &= G(I + KG)^{-1} d_u + (I + GK)^{-1} d_y \end{aligned}$$

(*)

Interna stabilnost

Provjera interne stabilnosti

- **Teorem 4.** Zatvoreni sistem upravljanja sa prethodne slike je interno stabilan ako i samo ako su sve matrice prijenosa u (*) stabilne.
- **Teorem 5.** Ako se pretpostavi da nema poništenja RHP polova i nula od $G(s)$ i $K(s)$, tada zatvoreni sistem upravljanja sa prethodne slike je interno stabilan ako i samo ako su sve matrice prijenosa u (*) stabilne.





Interna stabilnost

Implikacije interne stabilnosti

- Ukoliko $G(s)$ ima RHP nulu u $s = z$, tada:

$$L = GK, T = GK(I + GK)^{-1}, SG = (I + GK)^{-1}G$$
$$L_I = KG, T_I = KG(I + KG)^{-1}$$

imaju RHP nulu u z .

- Ako $G(s)$ ima RHP pol u $s = p$, tada:

$$L = GK \text{ i } L_I = KG$$

imaju RHP pol u p , dok

$$S = (I + GK)^{-1}, KS = K(I + GK)^{-1}, S_I = (I + KG)^{-1}$$

imaju RHP nulu u p .

Stabilizirajući regulatori

Stabilan proces

- **Stabilizirajući regulatori** – osiguravaju internu stabilnost zatvorenog sistema upravljanja.
- Koristi se **Q** ili **Youla parametrizacija**.
- **Teorem 6**. Za stabilan proces $G(s)$, sistem sa negativnom povratnom vezom na slici x. je interno stabilan ako i samo ako je $Q = K(I + GK)^{-1}$ stabilna matrica.

Dokaz:

- Matrice prijenosa iz (*) su:
$$K(I + GK)^{-1} = Q$$
$$(I + GK)^{-1} = I - GQ$$
$$(I + KG)^{-1} = I - QG$$
$$G(I + KG)^{-1} = G(I - QG)$$



Stabilizirajući regulatori

Stabilan proces

- Navedene matrice su stabilne ako su G i Q stabilne.
- Slijedi da će sa G sistem biti interno stabilan ako i samo ako je matrica Q stabilna.
- Parametrizacija svih stabilizirajućih regulatora sistema sa negativnom povratnom vezom sa stabilnim procesom:

$$K = (I - QG)^{-1} Q = Q(I - GQ)^{-1} \quad (**)$$

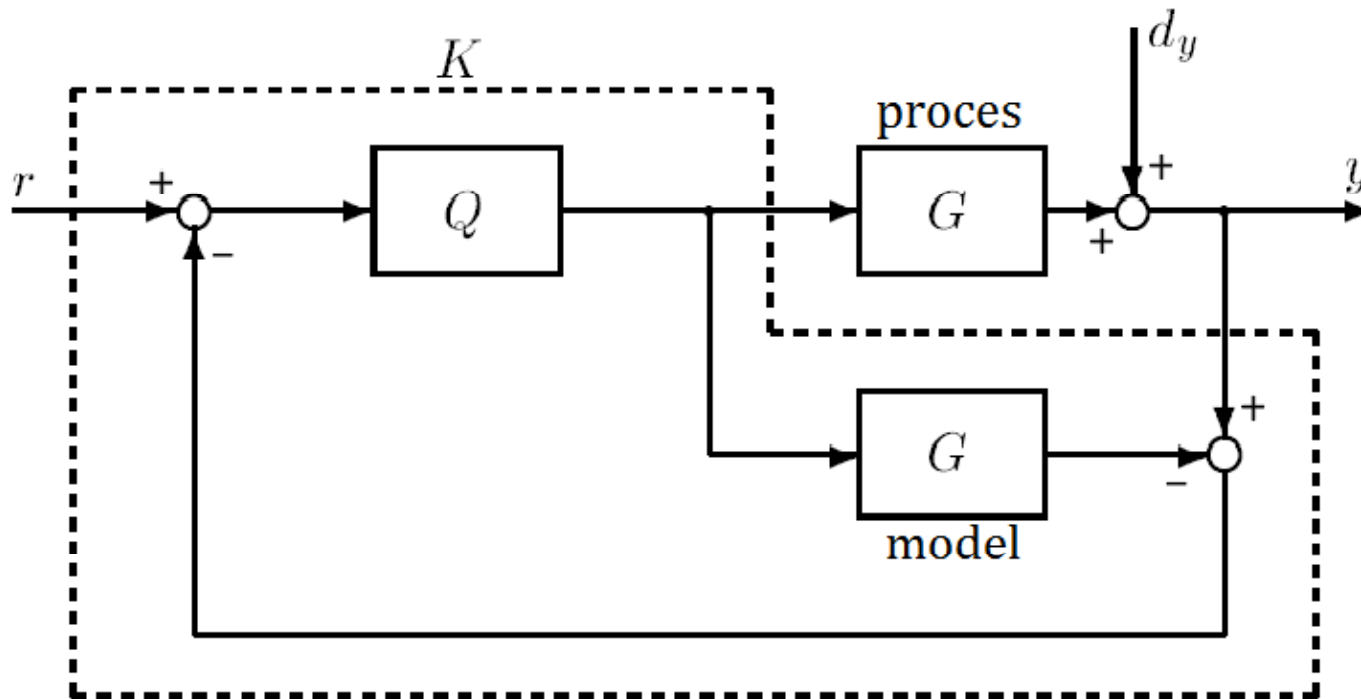
gdje Q predstavlja bilo koju stabilnu matricu prijenosa.



Stabilizirajući regulatori

Stabilan proces

- Parametrizacija (**) identična je **IMC** (Internal Model Control) parametrizaciji stabilizirajućih regulatora.
- IMC struktura je interno stabilna ako je bilo koja od matrica G i Q stabilna.





Stabilizirajući regulatori

Nestabilan proces

- **Koprim faktorizacija.**
- Za nestabilni proces $G(s)$ promatrajmo njegovu koprim faktorizaciju:

$$G(s) = N_r M_r^{-1} = M_l^{-1} N_l$$

- Parametrizacija svih stabilizirajućih regulatora (sistem sa povratnom vezom) procesa $G(s)$:

$$K(s) = (V_r - QN_l)^{-1} (U_r + QM_l)$$

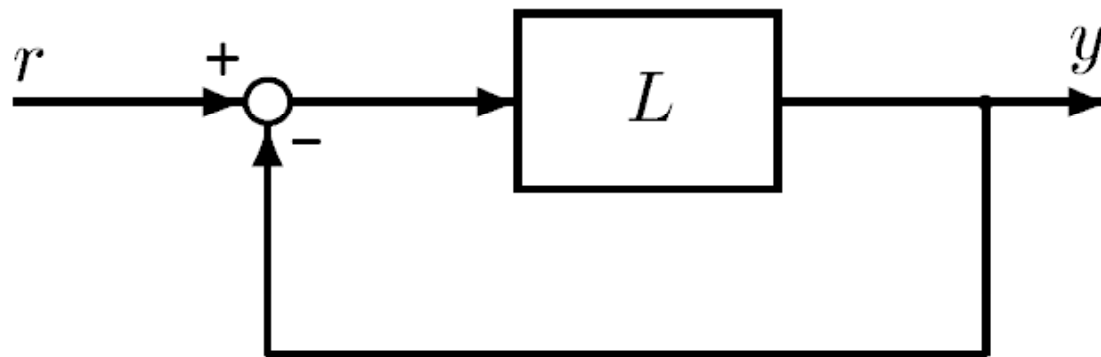
gdje V_r i U_r zadovoljavaju Bezoutov identitet za koprim faktorizaciju s desna i $Q(s)$ je bilo koja stabilna funkcija prijenosa koja zadovoljava uvjet:

$$\det(V_r(\infty) - Q(\infty)N_l(\infty)) \neq 0$$

Stabilnost u frekvencijskom području

Nyquistov kriterij za MIMO sisteme

- Promatrajmo sistem s neg. povratnom vezom:



- Pretpostavimo da nema internog poništavanja RHP polova i nula matrične funkcije prijenosa $L(s)$, odnosno da ona nema nestabilnih skrivenih modova.
- Generalizirani Nyquistov dijagram predstavlja krivulju $\det(I + L(j\omega))$ za $\omega \in [-\infty, \infty]$.

Stabilnost u frekvencijskom području

Nyquistov kriterij za MIMO sisteme

- **Teorem 7. Generalizirani Nyquistov teorem.**

Neka P_{ol} označava broj nestabilnih polova funkcije prijenosa otvorenog sistema $L(s)$.

Zatvoreni sistem upravljanja sa negativnom povratnom $(I + L(s))^{-1}$ je stabilan ako i samo ako Nyquistov dijagram od $\det(I + L(s))$:

- obilazi P_{ol} puta oko ishodišta u smjeru suprotnom od kretanja kazaljke na satu,
- ne prolazi kroz ishodište.



Robusnost MIMO sistema

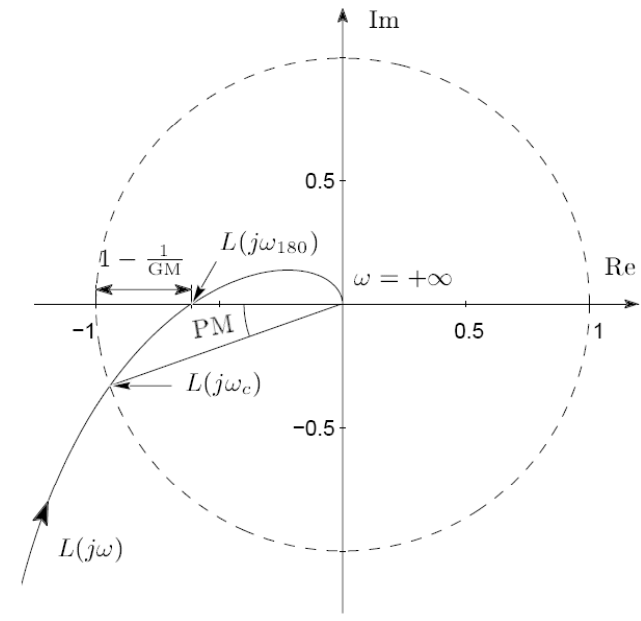
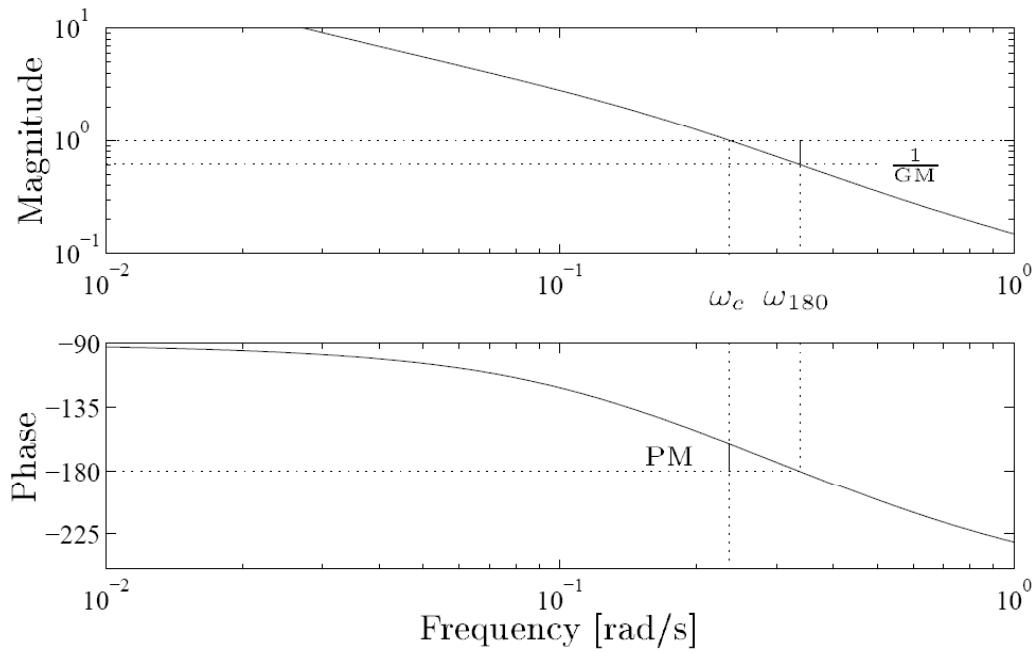
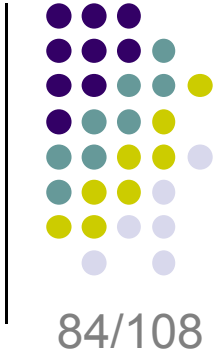
- Mjere robusnosti – amplitudno (GM) i fazno osiguranje (PM)**

$$GM = \frac{1}{|L(j\omega_{180})|}$$

$$\angle L(j\omega_{180}) = -180^0$$

$$PM = \angle L(j\omega_c) + 180^0$$

$$|L(j\omega_c)| = 1$$



Robusnost MIMO sistema

- Razmatranje dva primjera radi ilustracije osjetljivosti na neizvjesnosti koja se ne javlja kod SISO sistema.
- Fokus je na **dijagonalnoj ulaznoj neizvjesnosti**, koja djeluje između regulatora i procesa.

Primjer 17. Razmatra se upravljanje ugaonom brzinom satelita oko jedne od glavnih osi:

$$\mathbf{G}(s) = \frac{1}{s^2 + a^2} \begin{bmatrix} s - a^2 & a(s+1) \\ -a(s+1) & s - a^2 \end{bmatrix}$$

- Minimalna prezentacija $\mathbf{G} = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D}$ je:

$$\mathbf{G}(s) \stackrel{s}{=} \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \hline \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & a & 1 & 0 \\ -a & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & a & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Robusnost MIMO sistema

- Za stabilizaciju polova $s = \pm j\omega$ koristi se jednostavan dijagonalni regulator

$$\mathbf{K} = \mathbf{I}$$

- Slijedi:

$$\mathbf{T}(s) = \mathbf{GK}(\mathbf{I} + \mathbf{GK})^{-1} = \frac{1}{s+1} \begin{bmatrix} 1 & a \\ -a & 1 \end{bmatrix}$$

- Zatvoreni sistem ima dva pola u $s = -1$ i on je stabilan.
- Ovo se može provjeriti računanjem matrice stanja zatvorenog sistema \mathbf{A}_{cl} , koja se dobiva iz:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}, \quad \mathbf{y} = \mathbf{Cx}, \quad \mathbf{u} = -\mathbf{Ky}$$

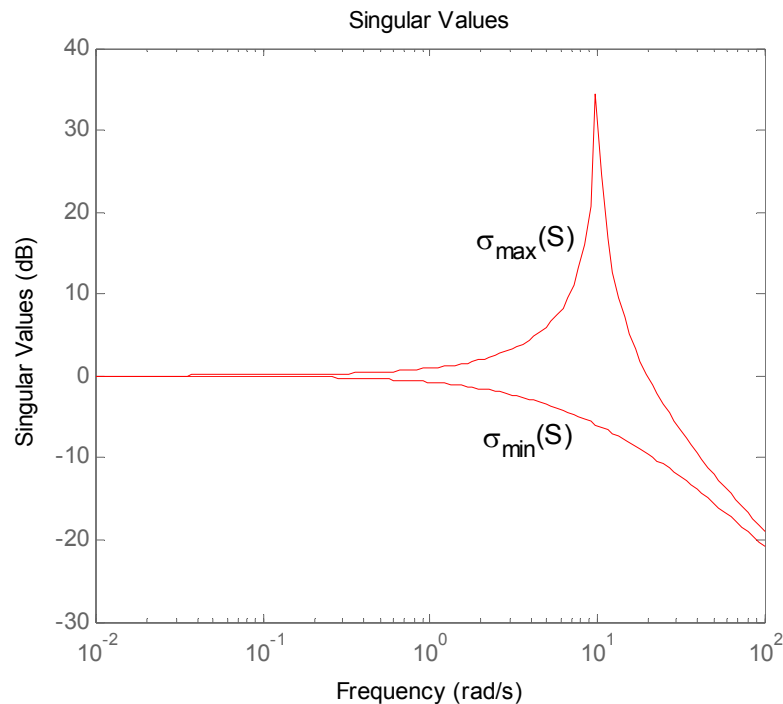
Robusnost MIMO sistema

- Kombiniranjem prethodnih izraza dobiva se:

$$A_{cl} = A - BKC = \begin{bmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & a \\ -a & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Nominalna performansa

- Singularne vrijednosti od $L = GK = G$ na slici.

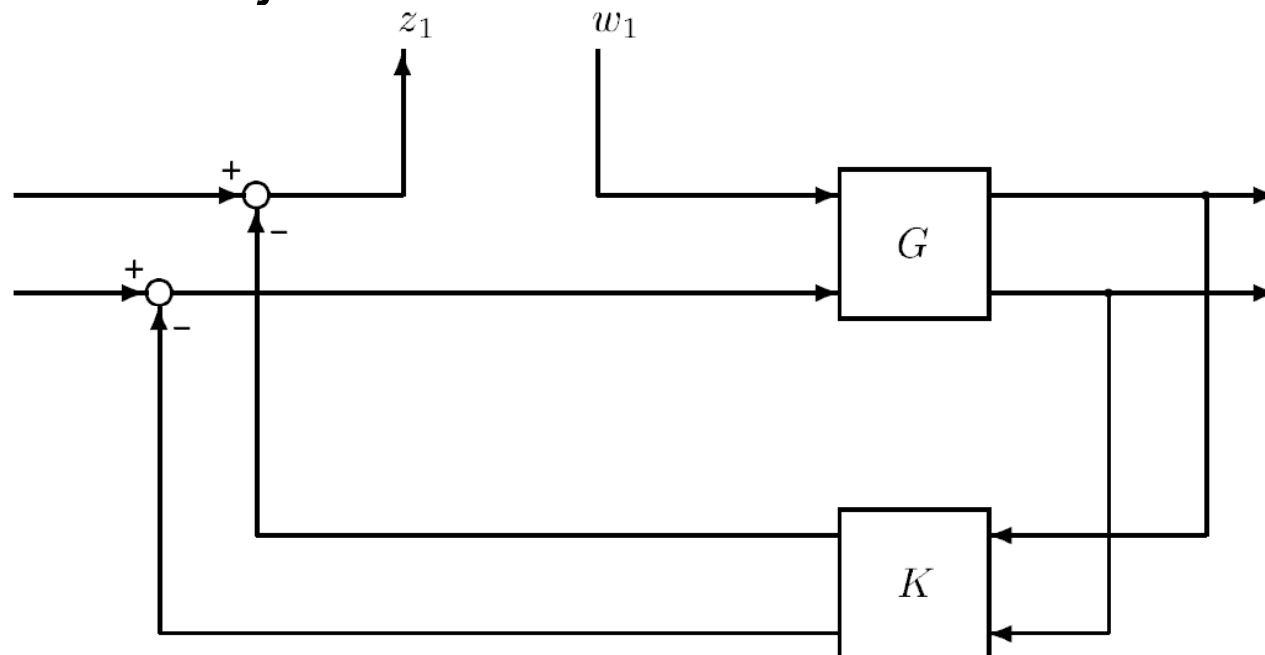


Robusnost MIMO sistema

- Budući da je $\underline{\sigma} \leq 1, \forall \omega \Rightarrow$ slabe upravljačke performanse u smjeru malog pojačanja.
- Vandijagonalni elementi u $T(s)$ indiciraju jaku interakciju u zatvorenom sistemu i slabe performanse.

Robusna stabilnost

- Određivanje osiguranja (rezerve) stabilnosti s obzirom na poremećaje u svakom ulaznom kanalu.



Robusnost MIMO sistema

- Promatra se jedna petlja u jednom vremenskom trenutku, na prethodnom slajdu to je petlja prvog ulaza, čija je funkcija prijenosa:

$$L_1(s) = \frac{1}{s} \Rightarrow GM = \infty, PM = 90^\circ$$

- Ako “isječemo” drugu petlju dobit ćemo isti rezultat.
- Promatramo poremećaj u svakom ulaznom kanalu (neizvjesnost u pojačanju ulaznog kanala):

$$u'_1 = (1 + e_1)u_1, \quad u'_2 = (1 + e_2)u_2$$

gdje e_1 i e_2 predstavljaju relativne pogreške pojačanja u pojedinom ulaznom kanalu.

Robusnost MIMO sistema

- Važno je istaći da je dijagonalna ulazna neizvjesnost, koja proizlazi iz naše nemogućnosti da znamo tačne vrijednosti manipulirajućih ulaza, uvijek prisutna.
- Ove neizvjesnosti možemo prikazati matricom:

$$B' = \begin{bmatrix} 1 + e_1 & 0 \\ 0 & 1 + e_2 \end{bmatrix}$$

- Matrica stanja zatvorenog sistema:

$$A'_{cl} = A - B'KC = \begin{bmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 + e_1 & 0 \\ 0 & 1 + e_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & a \\ -a & 1 \end{bmatrix}$$

- Karakteristični polinom:

$$\det(sI - A'_{cl}) = s^2 + \underbrace{(2 + e_1 + e_2)}_{a_1} s + \underbrace{1 + e_1 + e_2 + (a^2 + 1)e_1 e_2}_{a_0}$$

Robusnost MIMO sistema

- Ovaj sistem (zahvaćen poremećajem) je stabilan ako i samo ako su oba koeficijenta a_1 i a_2 pozitivna.
- Sistem je uvijek stabilan ako se uzima u obzir poremećaj u samo jednom kanalu, s tim da pojačanje u tom kanalu mora biti pozitivno.
- Drugim riječima imamo stabilnost za:

$$(-1 < e_1 < \infty, e_2 = 0) \text{ i } (e_1 = 0, -1 < e_2 < \infty)$$

što je potvrđeno i velikim iznosom GM -a.

- Sistem može tolerirati samo male promjene u drugim kanalima.
- Ako je $e_1 = e_2$, sistem je nestabilan ($a_2 < 0$) za:

$$|e_1| > \frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}} \approx 0.1$$



Robusnost MIMO sistema

Sumarno:

- Provjera rezervi (fazna i amplitudna) stabilnosti pojedinačnih petlji nije adekvatno za MIMO sisteme.
- Visoke vrijednosti $\bar{\sigma}(T)$ i $\bar{\sigma}(S)$ ukazuju na probleme robusnosti.
- **Primjer 18.** Destilacijski proces (kolona).
- Idealizirani dinamički model:

$$\mathbf{G}(s) = \frac{1}{75s + 1} \begin{bmatrix} 87.8 & -86.4 \\ 108.2 & -109.6 \end{bmatrix}$$

- Ovaj proces je detaljno analiziran u primjeru 4.



Robusnost MIMO sistema

- Proces je slabo uvjetovan jer je $\gamma = 141.7$ na svim frekvencijama.
- Proces je strogo interaktivan i RGA matrica je:

$$\mathbf{RGA}(\mathbf{G}) = \begin{bmatrix} 35.1 & -34.1 \\ -34.1 & 35.1 \end{bmatrix}$$

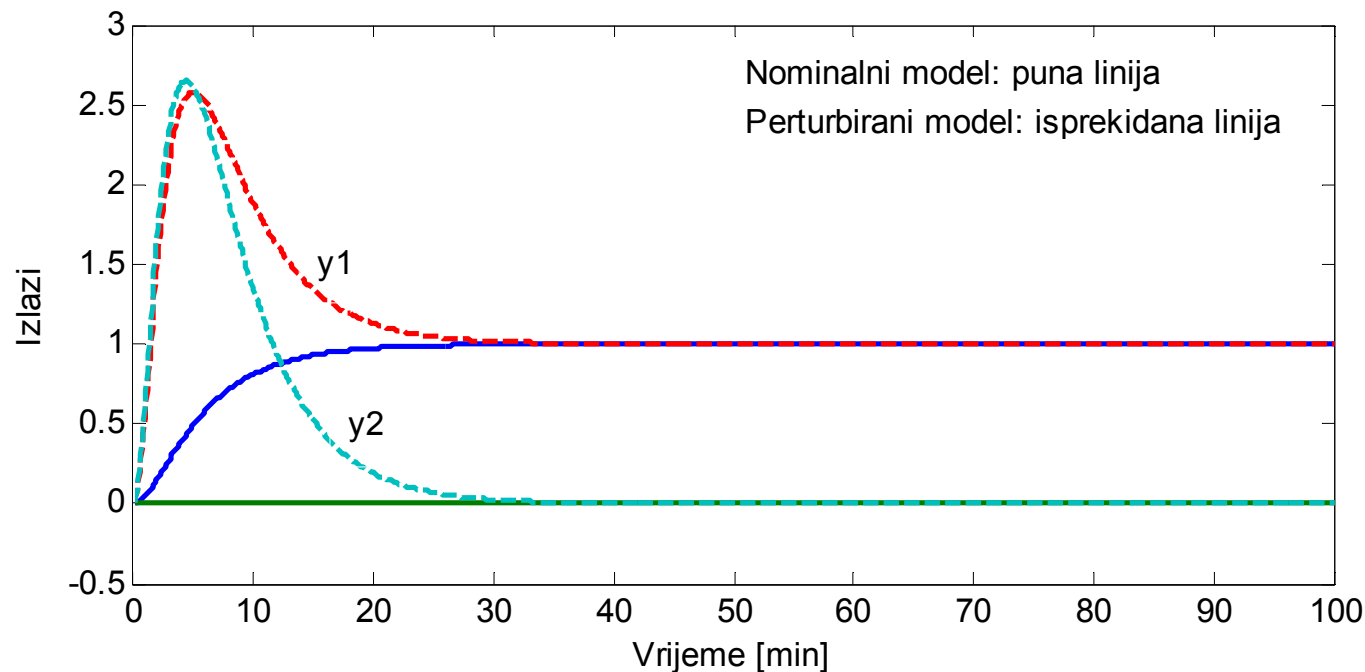
- **Visoke vrijednosti elemenata RGA matrice ukazuju da je veoma teško upravljati ovim procesom.**
- Promatrajmo na inverziji zasnovan regulator (engl. inverse based controller), koji se također može promatrati kao raspregnuti regulator sa PI djelovanjem:

$$\mathbf{K}_{inv}(s) = \frac{k_1}{s} \mathbf{G}(s) = \frac{k_1(1 + 75s)}{s} \begin{bmatrix} 0.3994 & -0.3149 \\ 0.3943 & -0.3200 \end{bmatrix}, \quad k_1 = 0.7$$

Robusnost MIMO sistema

Nominalna performansa

- Imamo da je $G(s)K_{inv}(s) = K_{inv}(s)G(s) = \frac{0.7}{s} I$
- Ako nema pogreške u modelu ovaj regulator može se suprostaviti interakcijama u procesu.
- Na slici se vide odzivi dva raspregnuta sistema prvog reda sa vremenom porasta $1/0.7=1.43$ min.



Robusnost MIMO sistema

- Rezultati su dobiveni sa prefiltriranjem referentnog ulaza $r_1=1/(5s+1)$ i 20% neizvjesnosti u pojačanju:

$$u'_1 = (1 + 0.2)u_1 = 1.2u_1, \quad u'_2 = (1 - 0.2)u_2 = 0.8u_2$$

- Iz odziva za nominalni proces zaključuje se da su nominalne performanse postignute sa raspregnutim regulatorom.
- Funkcije osjetljivosti i komplementarne osjetljivosti sa ovim regulatorom su:

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}_I = \frac{s}{s + 0.7} \mathbf{I}, \quad \mathbf{T} = \mathbf{T}_I = \frac{1}{1.43s + 1} \mathbf{I}$$

- Budući da su $\bar{\sigma}(\mathbf{T})$ i $\bar{\sigma}(\mathbf{S})$ manji od 1 na svim frekvencijama \Rightarrow nema šiljaka koji ukazuju na probleme robusnosti.

Robusnost MIMO sistema

- Za ovaj regulator je $GM = \infty$, $PM = 90^\circ$ u svakom kanalu.

Robusna stabilnost

- Neizvjesnosti ulaznih pojačanja:

$$u'_1 = (1 + 0.2)u_1 = 1.2u_1, \quad u'_2 = (1 - 0.2)u_2 = 0.8u_2$$

same po sebi ne dovode do nestabilnosti.

- Ovo se može provjeriti računanjem polova zatvorenog sistema i uz pretpostavku da nema poništenja polova i nula dobiva se:

$$\det(\mathbf{I} + \mathbf{L}(s)) = \det(\mathbf{I} + \mathbf{L}_I(s)) = 0$$



Robusnost MIMO sistema

- U ovom slučaju imamo:

$$L'_I(s) = K_{inv} G' = K_{inv} G \begin{bmatrix} 1+e_1 & 0 \\ 0 & 1+e_2 \end{bmatrix} = \frac{0.7}{s} \begin{bmatrix} 1+e_1 & 0 \\ 0 & 1+e_2 \end{bmatrix}$$

gdje su polovi zatvorenog sistema s djelovanjem poremećaja:

$$s_1 = -0.7(1+e_1), \quad s_2 = -0.7(1+e_2)$$

- Slijedi da će sistem biti stabilan dok god ulazna pojačanja $1+e_1$ i $1+e_2$ poprimaju pozitivne vrijednosti.
- Robusna stabilnost je postignuta sa raspregnutim regulatorom s obzirom na pogreške ulaznog pojačanja.



Robusnost MIMO sistema

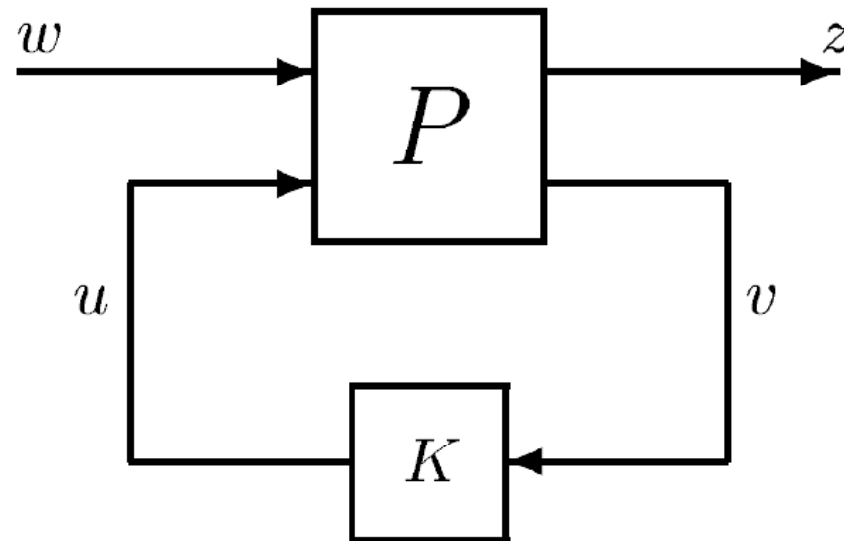
Robusne performanse (RP)

- SISO sistemi: $NP+RS \Rightarrow RP$
- MIMO sistemi: $NP+RS \not\Rightarrow RP$
- Ovo se uočava sa odziva sistema bez poremećaja (nominalni) i sistema sa poremećajem.
- Odziv sistema podvrgnutog poremećaju se značajno razlikuje od nominalnog, pa i ako je sistem stabilan, odziv nije prihvatljiv.
- Slijedi da robusne performanse nisu postignute sa raspregnutim regulatorom.



Opća formulacija problema upravljanja

- **Cilj:** dizajnirati regulator K kojim će se minimizirati neka norma funkcije prijenosa od w prema z .
- Pronaći regulator K koji će na temelju dobivenih informacija v (sa senzora) generirati upravljački ulaz u koji će se suprostaviti djelovanju w na z , na način da se minimizira norma funkcije prijenosa od w ka z .

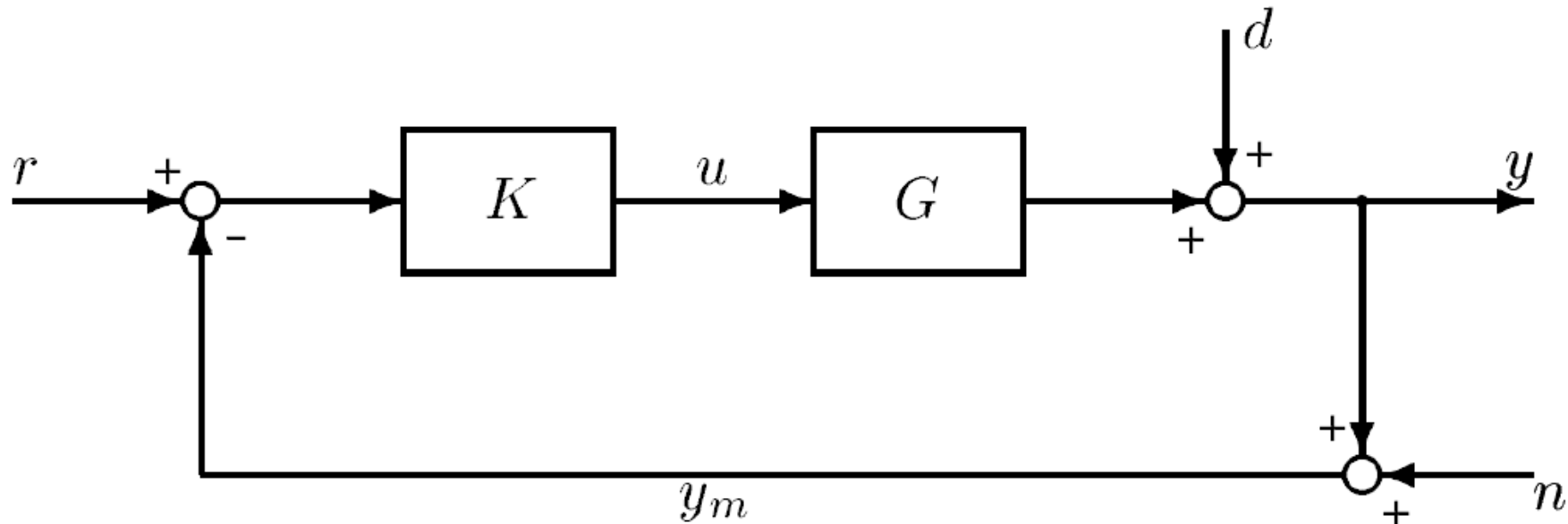


Opća formulacija problema upravljanja

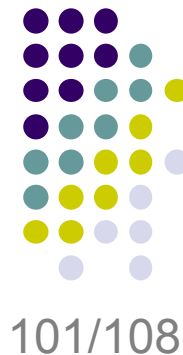


- Kod sinteze H_2 i H_∞ regulatora pretpostavlja se da je poznat proces P , odnosno njegova funkcija prijenosa.
- Za izvođenje P (i K) potrebno je načiniti prvo blokovski dijagram sistema i identificirati signale w , z , u i v .

Primjer 19. Konfiguracija s jednim stupnjem slobode.



Opća formulacija problema upravljanja



- Identifikacija signala generaliziranog procesa:

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} \mathbf{w}_1 \\ \mathbf{w}_2 \\ \mathbf{w}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{d} \\ \mathbf{r} \\ \mathbf{n} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{z} = \mathbf{e} = \mathbf{y} - \mathbf{r}; \quad \mathbf{v} = \mathbf{r} - \mathbf{y}_m = \mathbf{r} - \mathbf{y} - \mathbf{n}$$

- Na temelju slike s prethodnog slajda imamo:

$$\mathbf{z} = \mathbf{y} - \mathbf{r} = \mathbf{G}\mathbf{u} + \mathbf{d} - \mathbf{r} = \mathbf{I}\mathbf{w}_1 - \mathbf{I}\mathbf{w}_2 + \mathbf{0}\mathbf{w}_3 + \mathbf{G}\mathbf{u}$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{r} - \mathbf{y}_m = \mathbf{r} - \mathbf{G}\mathbf{u} - \mathbf{d} - \mathbf{n} = -\mathbf{I}\mathbf{w}_1 + \mathbf{I}\mathbf{w}_2 - \mathbf{I}\mathbf{w}_3 - \mathbf{G}\mathbf{u}$$

- Matrična funkcija prijenosa od $[\mathbf{w} \quad \mathbf{u}]^T$ prema $[\mathbf{z} \quad \mathbf{v}]^T$:

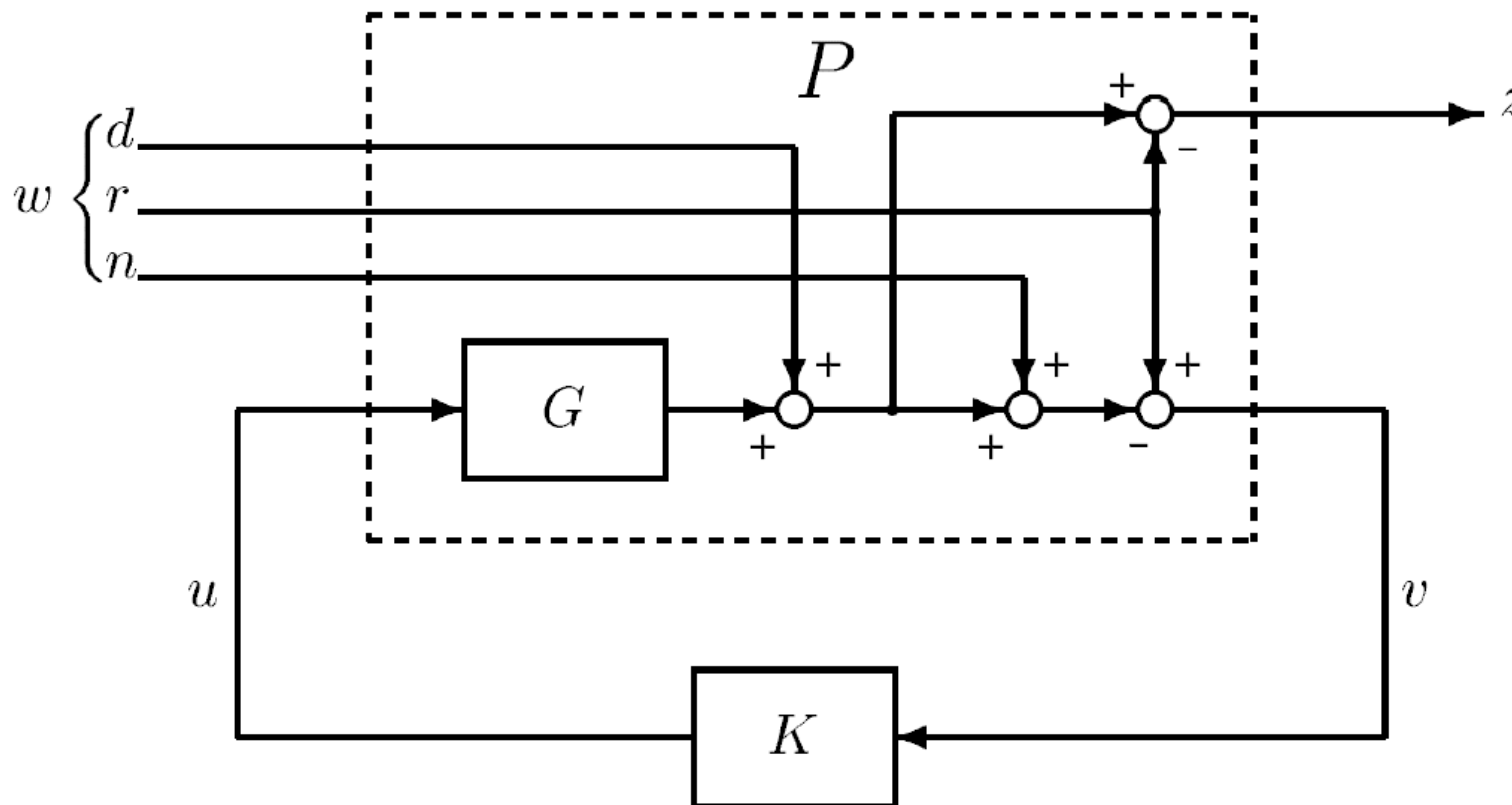
$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{G} \\ -\mathbf{I} & -\mathbf{I} & -\mathbf{I} & -\mathbf{G} \end{bmatrix}$$

Opća formulacija problema upravljanja

- Signal kojeg treba minimizirati je signal pogreške:

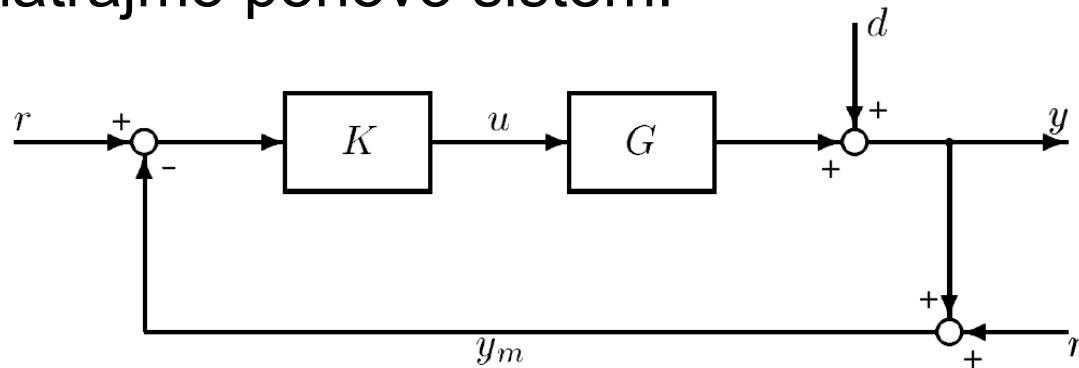
$$z = e = y - r$$

- Ekvivalentni prikaz:



Opća formulacija problema upravljanja

- Promatrajmo ponovo sistem:



- Imamo:

$$\mathbf{y} = \mathbf{GK}(\mathbf{r} - \mathbf{y} - \mathbf{n}) + \mathbf{G}_d \mathbf{d} \Rightarrow (\mathbf{I} + \mathbf{GK})\mathbf{y} = \mathbf{GK}(\mathbf{r} - \mathbf{n}) + \mathbf{G}_d \mathbf{d}$$

- Iz čega slijede matrice funkcije prijenosa:

$$\mathbf{y} = \underbrace{(\mathbf{I} + \mathbf{GK})^{-1} \mathbf{GK}}_T \mathbf{r} + \underbrace{(\mathbf{I} + \mathbf{GK})^{-1} \mathbf{G}_d}_S \mathbf{d} - \underbrace{(\mathbf{I} + \mathbf{GK})^{-1} \mathbf{GK}}_T \mathbf{n}$$

- Pogreška upravljanja i upravljački ulaz:

$$\mathbf{e} = \mathbf{r} - \mathbf{y} = -\mathbf{S}\mathbf{r} + \mathbf{S}\mathbf{G}_d \mathbf{d} - \mathbf{T}\mathbf{n}, \quad \mathbf{u} = \mathbf{K}\mathbf{S}\mathbf{r} - \mathbf{K}\mathbf{S}\mathbf{G}_d \mathbf{d} - \mathbf{K}\mathbf{S}\mathbf{n}$$

Opća formulacija problema upravljanja

- Zahtjevi kod sinteze regulatora:

Kompenzacija (gušenje) poremećaja: S treba biti što je moguće manji da bi se smanjio utjecaj poremećaja na sistem:

$$|S(j\omega)| \ll 1 \quad \longrightarrow \quad \text{Povećati što više pojačanje otvorenog kruga.}$$

Praćenje referentnog ulaza: Osjetljivost sistema S mora se držati malom kako bi pogreške bile male:

$$|S(j\omega)| \ll 1$$

Kompenzacija djelovanja šuma: Da bi se smanjio učinak šuma mjerenja na izlaz i pogrešku sistema komplementarna osjetljivost sistema mora biti mala:

$$|T(j\omega)| \ll 1 \quad \longrightarrow \quad \text{Pojačanje otvorenog kruga mora biti malo.}$$



Opća formulacija problema upravljanja

Ograničenje aktuatora:

- Iz izraza za upravljački ulaz:

$$u = KSr - KSG_d d - KSn$$

slijedi da se KS mora ograničiti kako bi se osiguralo da izvršni signal, kojim se djeluje na proces, bude unutar raspoloživih energetske resursa:

$$KS = K(I + GK)^{-1} = (GK)^{-1} K(I + GK)^{-1} GK = G^{-1}T$$

- Navedeni zahtjev će biti zadovoljen ako se komplementarna osjetljivost drži malom:

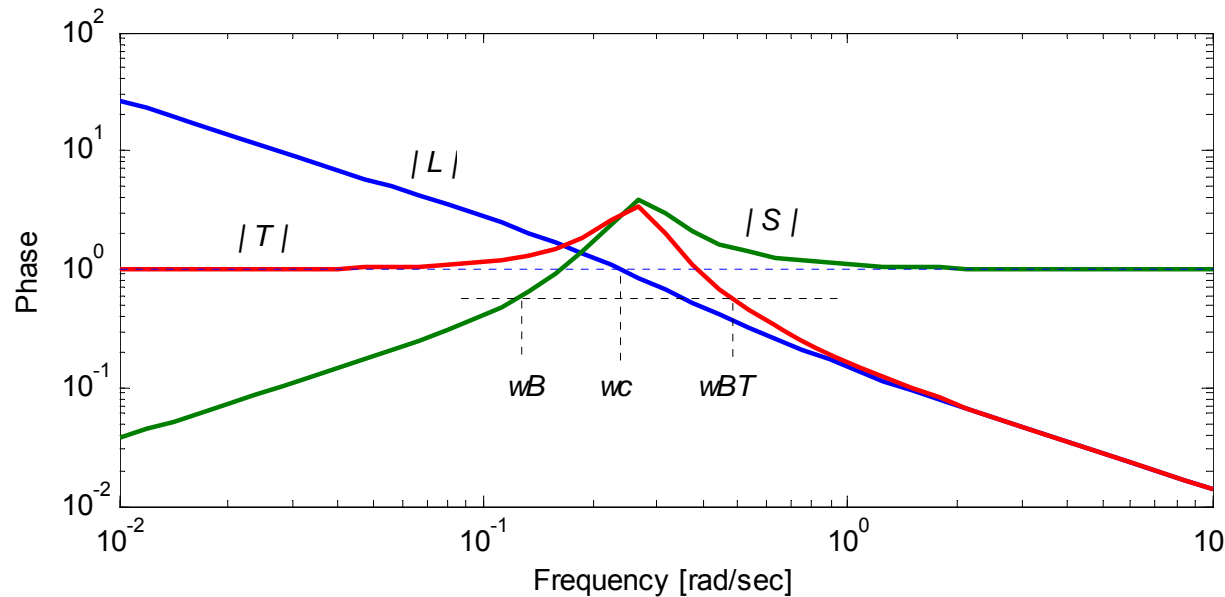
$$|T(j\omega)| \ll 1 \quad \text{Na ovaj način će se smanjiti i energija potrebna za upravljanje.}$$

Opća formulacija problema upravljanja

- Osjetljivost S daje relativnu osjetljivost funkcije prijenosa zatvorenog sistema T u odnosu na relativnu pogrešku modela procesa:

$$S = \frac{dT/T}{dG/G}$$

Utjecaj smetnje na osjetljivost: $y = SG_d d$



$|S(j\omega)| < 1$ smanjena osjetljivost
 $|S(j\omega)| > 1$ povećana osjetljivost

na ω_c : $|L(j\omega_c)| = 1$

na ω_B : $|S(j\omega_B)| = 1/\sqrt{2}$

na ω_{BT} : $|T(j\omega_{BT})| = 1/\sqrt{2}$

Opća formulacija problema upravljanja

- **Ukoliko želimo smanjiti učinak djelovanja poremećaja d i učinak šuma mjerenja n tada osjetljivosti S i T trebaju biti što manje.**
- Međutim to nije moguće istovremeno postići jer je $S(s) + T(s) = I$.
- Ako na nekoj frekvenciji S smanjimo blizu nule, slijedi da će na istoj frekvenciji T biti blizu jedinici.
- **Kopromis:** na niskim frekvencijama (obično djeluju poremećaji na sistem) dopušta se da S bude malo, a na visokim frekvencijama (obično djeluju šumovi mjerenja) se T smanjuje.

Opća formulacija problema upravljanja

Sistem sa neizvjesnostima

- Minimizirati normu funkcije prijenosa od w ka z u prisustvu neizvjesnosti $\Delta(s)$ tako da je $\|\Delta(s)\|_{\infty} \leq 1$.

